BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°6

Samedi 9 mars 2024

– Suites, limites, DL –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignés ou $\boxed{\textbf{encadrés}}$. N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(e^{-3x})$.
2. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) en $+\infty$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)-\sqrt{x}$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2)-\sqrt{x}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x}-\cos(x)$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)-x}{x^3}$
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin(x)\ln(1+2x)$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2}{x^3}$

Exercice 2 - Étude d'une suite récurrente

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}$$

On pose $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x}$

1. **Informatique**
   (a) Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en entrée un entier naturel et qui renvoie le terme u_n de la suite.
   (b) Écrire une fonction python `somme(p,n)` qui prend en entrée deux entiers naturels `n` et `p` tels que $n \leqslant p$ (on ne demande pas de le faire vérifier) et qui renvoie la somme $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k$.
   (c) Écrire une fonction python `seuil(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0,1[$ et qui renvoie le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < u_n$.
2. **Étude de la fonction f**
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer les points-fixes de f (c'est à dire les solutions, sur l'ensemble de définition de f, de l'équation $f(x) = x$).
   (c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-1,+\infty[$. On fera apparaître les limites et valeurs aux bornes de cet ensemble.

(d) Tracer sur le même graphe la droite d'équation $y = x$ et l'allure de la courbe représentative de f sur $]-1,+\infty[$, en prenant pour échelle 4cm (5 grands carreaux) pour une unité.

(e) Représenter sur le dessin précédent les termes u_0, u_1, u_2.

(f) Montrer (en soignant particulièrement la rédaction) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0,1] \Longrightarrow f(x) \in [0,1]$$

On dit alors que $[0,1]$ est stable par f.

3. **Étude de la suite** (u_n)

   (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie, à valeurs dans $[0,1]$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est monotone et préciser sa monotonie.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

4. **Expression de u_n en fonction de n**

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$

   (b) Déterminer un équivalent de $u_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

   (c) En déduire qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que l'on déterminera) qui vérifie :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + v_n + o(v_n)$$

Exercice 3

Pour tout entier naturel non-nul n, on considère la fonction :

$$f_n : x \mapsto e^{-nx} - x$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de f_n sur $[0,1]$. On résumera les résultats obtenus dans un tableau de variations où on indiquera les valeurs aux bornes de cet intervalle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n établit une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble à déterminer. En déduire qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-x} + x(e^{-x} - 1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que $f_{n+1}(x_n) < 0$. Établir alors sans justifier le tableau de variation de f_{n+1} sur $[0,1]$ et y placer x_n et x_{n+1}.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. Montrer que cette suite est convergente.
7. On note ℓ sa limite. Montrer que $\ell \in [0,1]$.
8. Déterminer ℓ.