

Exercice 1 - Calculs.

1. $P = 2X^2(X+1)(X+\frac{1}{2})$.
2. $Q = (X-1)^2(X^2+X+1) = (X-1)^2(X-j)(X-\bar{j})$ (où on a noté $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$).
3. $R = (X-1)(X+1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$

Exercice 2 - Informatique.

```
1.
1 def suite(n):
2     u = 1
3     v = 2
4     for i in range(2,n+1):
5         u, v = v, 3 * v + 2 * u + 4
6     return u
```

```
2.
1 def somme(n):
2     s = 0
3     for i in range(1,n+1):
4         s = s + suite(i)
5     return s
```

```
3.
1 def superieur():
2     n = 1
3     while suite(n) < 1000:
4         n = n + 1
5     return n
```

Exercice 3 - Géométrie.

1. (a) Une représentation paramétrique de D est $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

(b) Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à P_1 . Donc,

$$\begin{aligned} C(x, y, z) \in P_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \cdot -2 + (y+1) \cdot 1 + (z-1) \cdot 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + y + z + 2 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de P_1 est $-2x + y + z + 2 = 0$.

2. (a) $A(1, 0, 2) \in P$ et $\vec{u} = (1, -1, 1), \vec{v} = (2, 1, -1)$ en sont des vecteurs directeurs.

$$(b) \begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = -t + t' \\ z = 2 - t - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ x + y = 1 + 3t' \\ x + z = 3 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ x + y = 1 + 3t' \\ x + y - 3(x + z) = -8 \end{cases}.$$

Une équation cartésienne de P est $-2x + y - 3z + 8 = 0$.

- (c) On remarque que le vecteur $\vec{n} = (-2, 1, -3)$ est un vecteur normal à P .

Le point $H(x, y, z)$ vérifie le système suivant $\begin{cases} H \in P \\ \overrightarrow{NH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} H \in P \\ \overrightarrow{NH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 3z + 8 = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{NH} = \lambda \cdot \vec{n} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 3z + 8 = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y - 2, z - 1) = \lambda(-2, 1, -3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) = (-2\lambda, 2 + \lambda, 1 - 3\lambda) \\ 4\lambda + 2 + \lambda - 3(1 - 3\lambda) + 8 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) = (-2\lambda, 2 + \lambda, 1 - 3\lambda) \\ 14\lambda + 7 = 0 \end{cases} \\ &1 \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\boxed{H\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}$.

(d) On sait que la distance de N à P est la norme du vecteur $\overrightarrow{HN}$.

$$\|\overrightarrow{HN}\|^2 = (1-0)^2 + \left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-1\right)^2 = \frac{14}{4}$$

Donc, $\boxed{d(N, P) = \frac{\sqrt{14}}{2}}$.

Exercice 4 - Puissances de matrices.

Partie 1 : Matrices de taille 2

1. P est une matrice carrée d'ordre 2. Calculons : $\det P = 1 \neq 0$,

donc P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

3. Montrons ce résultat par récurrence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n$: " $X_n = A^n X_0$ ".
- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} X_0 &= (AA^n) X_0 \text{ par définition de la puissance } n+1 \text{ de la matrice } A \\ &= A(A^n X_0) \text{ par associativité du produit matriciel} \\ &= AX_n \text{ d'après } \mathcal{P}_n \\ &= X_{n+1} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0}$.

4. Le calcul de $D = (P^{-1}A)P$ donne : $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

5. Par définition, $D = P^{-1}AP$. On multiplie par P à gauche. On obtient : $PD = AP$. Puis, en multipliant par P^{-1} à droite : $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

Montrons le résultat suivant par récurrence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n$: " $A^n = PD^n P^{-1}$ ".
- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $PD^0 P^{-1} = PI_2 P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = D^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \text{ par définition de la puissance } n+1 \text{ de la matrice } A \\ &= (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) \text{ d'après } \mathcal{P}_n \text{ et la question précédente} \\ &= PD^n (P^{-1}P)DP^{-1} \text{ par associativité du produit matriciel} \\ &= PD^n I_2 DP^{-1} \\ &= PD^{n+1} P^{-1}. \text{ Donc } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$.

6. La matrice D est une matrice diagonale. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. On a démontré que $A^n = (PD^n)P^{-1}$. Ainsi : Calculons : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Puis : $\boxed{A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}}$.

8. On a calculé A^n en fonction de n à la question ???. Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} (2-2^n).2 + (-1+2^n) \\ 2(2-2^{n+1}) + (-1+2^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2^n \\ 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2^n \\ 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$. On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3-2^n}$.

Partie 2 : Matrices de taille 3

- $AB = 0_3$. Si A était inversible, on aurait $B = A^{-1}0_3 = 0_3$ ce qui est absurde donc A n'est pas inversible. De même pour B .
- $A^2 = 3A$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}A$: c'est vrai pour $n = 1$ ($3^0 = 1$) et si on suppose pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé que $A^n = 3^{n-1}A$ alors $A^{n+1} = A.A^n = 3^{n-1}A^2 = 3^n A$ d'après le calcul précédent. On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A^n = 3^{n-1}A}$

3. (a) $\boxed{B^2 = 8A - 24I}$

- (b) $A(3I) = 3IA = 3A$ donc on peut utiliser la formule du binôme ; de plus, si $k > 0$, $A^k(-3I)^{n-k} = 3^{k-1}A$ donc $A^k(-3I)^{n-k} = 3^{n-1}(-1)^k A$ et $(A - 3I)^n = (-3)^n I + 3^{n-1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} A$

Enfin $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} - (-1)^n = (1-1)^n + (-1)^{n-1}$

donc $\boxed{(A - 3I)^n = (-3)^n I + (-3)^{n-1} A}$

- (c) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{B^{2n} = 8^n ((-3)^n I + (-3)^{n-1} A)}$ puis $\boxed{B^{2n+1} = B^{2n} B = (-24)^n B}$
(car $AB = 0_3$)

4. (a) $\boxed{C = 5A + B}$.

- (b) Comme $AB = BA = 0_3$ on obtient d'après la formule du binôme $C^n = 5^n A^n + B^n$ donc

si $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{C^{2k} = (5^{2k} 3^{2k-1} + 8^k (-3)^{k-1}) A + (-24)^k I}$ et si $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{C^{2k+1} = 5^{2k+1} 3^{2k} A + (-24)^k B}$

Exercice 5 - Polynômes.

- D'après la définition des P_n , $P_3 = XP_2 - P_1 = X^2 - 1$, et $P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^2 - 1) - X$.

Donc $\boxed{P_3 = X^2 - 1 \text{ et } P_4 = X^3 - 2X}$.

- Nous allons prouver ceci par récurrence à deux pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence :

$\mathcal{Q}_n$: " P_n est de degré $n-1$ et son coefficient dominant est 1".

• P_1 est unitaire de degré 0, et P_2 est unitaire de degré 1. Donc $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont vraies.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ soient vraies.

Puisque P_{n+1} est unitaire de degré n (d'après $\mathcal{Q}_{n+1}$), il existe un polynôme R de degré $\leq n-1$, tel que $P_{n+1} = X^n + R$.

De plus, par définition de la suite (P_n) :

$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Donc $P_{n+2} = X(X^n + R) - P_n = X^{n+1} + \underbrace{XR - P_n}_{\text{degré} \leq n(*)}$.

(*) car d'après $\mathcal{Q}_n$, P_n est de degré $n-1$.

On en déduit que P_{n+2} est unitaire, de degré $n+1$. Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.

• Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P_n \text{ de degré } n-1, \text{ et son coefficient dominant est } 1}$.

- Remarquons tout d'abord que l'expression en fonction de θ est bien définie pour $\theta \in]0, \pi[$ car $\sin(\theta) \neq 0$ (le dénominateur de la fraction est non-nul).

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Nous allons montrer cette égalité par récurrence à deux pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence :

$\mathcal{Q}_n$: " $P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ ".

• $P_1(2 \cos(\theta)) = 1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$ donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

$P_2(2 \cos(\theta)) = 2 \cos \theta$, or $\frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$. Donc $P_2(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta}$. Donc $\mathcal{Q}_2$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ soient vraies.

Puisque par définition, $P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$, on a :

$P_{n+2}(2 \cos \theta) = (2 \cos \theta) P_{n+1}(2 \cos \theta) - P_n(2 \cos \theta)$. Donc, d'après $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$:

$$P_{n+2}(2 \cos \theta) = (2 \cos \theta) \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \cos \theta (\sin(n\theta) \cos \theta + \sin \theta \cos(n\theta)) - \sin(n\theta)}{\sin \theta}.$$

On factorise au numérateur puis on applique des formules de trigonométrie (angle double) :

$$P_{n+2}(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)(2 \cos^2 \theta - 1) + (2 \cos \theta \sin \theta) \sin(n\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin(n\theta) \cos(2\theta) + \sin(2\theta) \cos(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

On reconnaît $\sin((n+2)\theta)$ au numérateur (encore une formule de trigonométrie), d'où :

$$P_{n+2}(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n+2)\theta}{\sin \theta}. \text{ Donc } \mathcal{Q}_{n+2} \text{ est vraie.}$$

• Ainsi, d'après le principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

4.

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) = 0 &\iff \sin(n\theta) = \sin(0) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : n\theta = k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Or $0 < \theta < \pi$ donc les seules valeurs de k possibles sont celles vérifiant $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, c'est à dire, en multipliant par $\frac{n}{\pi} > 0$: $0 < k < n$. Puisque k est un entier, cela est équivalent à $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Ainsi :

$\sin(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket : \theta = \frac{k\pi}{n}$

5. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ fixé quelconque. Pour tout $\theta \in]0, \pi[, 2 \cos \theta \in]-2, 2[$, donc nous pouvons chercher des racines de P_n dans $] -2, 2[$ sous la forme $2 \cos \theta$, avec $\theta \in]0, \pi[$.

$$\begin{aligned} P_n(2 \cos \theta) = 0 &\iff \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 0 \\ &\iff \sin(n\theta) = 0 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket : \theta = \frac{k\pi}{n} \text{ d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction $\theta \mapsto 2 \cos(\theta)$ est injective sur $]0, \pi[$ (car elle est strictement décroissante sur cet intervalle). Donc, puisque pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, les $\frac{k\pi}{n}$ sont des réels de $]0, \pi[$ deux à deux distincts, on en déduit que les nombres $2 \cos(\frac{k\pi}{n})$ sont deux à deux distincts quand k parcourt $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Ainsi, nous avons trouvé $n-1$ racines deux à deux distinctes de P_n , et ces racines appartiennent à l'intervalle $] -2, 2[$. Or P_n est de degré $n-1$ donc il a au plus $n-1$ racines. Il n'y a donc pas d'autre racine.

On en déduit que P_n a exactement $n-1$ racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $] -2, 2[$.

L'ensemble des racines de P_n est :

$\{2 \cos(\frac{k\pi}{n}), k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$.

6. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. On connaît les racines de P_n et son coefficient dominant. D'où

$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} (X - 2 \cos(\frac{k\pi}{n}))$

7. Soit un entier $n \geq 2$. D'après le résultat de la question ??, $P_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}$. Donc, d'après la factorisation précédente :

$$P_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} = \prod_{k=1}^{n-1} (2 \cos \theta - 2 \cos(\frac{k\pi}{n})) = \prod_{k=1}^{n-1} 2(\cos \theta - \cos(\frac{k\pi}{n})).$$

On en déduit :

$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (\cos(\theta) - \cos(\frac{k\pi}{n}))$.