



1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°5

Samedi 27 janvier 2024

– Matrices, Géométrie, Polynômes –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés. N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs.

Factoriser les polynômes suivants :

1. $P = 2X^4 + 3X^3 + X^2$.
2. $Q = X^4 - X^3 - X + 1$.
3. $R = X^4 - 1$.

Exercice 2 - Informatique.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = 1, u_2 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n + 4$$

1. Écrire une fonction suite qui prend en entrée un entier n et qui renvoie le terme u_n .
2. Écrire une fonction somme qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n u_k$.
3. On peut montrer que cette suite tend vers $+\infty$. Écrire une fonction supérieur qui renvoie l'indice du premier terme de la suite supérieur ou égal à 1000. Cette fonction ne reçoit rien en entrée.

Exercice 3 - Géométrie.

1. On note $M(1, -1, 1)$ et D la droite passant par $A(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2, 1, 1)$.
 - (a) Donner une représentation paramétrique de la droite D .
 - (b) Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 , passant par M et orthogonal à D .
2. On note $N(0, 2, 1)$ et P le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = -t + t' \\ z = 2 - t - t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) Déterminer un point du plan P et deux vecteurs directeurs.
 - (b) Donner une équation cartésienne du plan P .
 - (c) Déterminer les coordonnées de H , le projeté orthogonal de N sur P .
 - (d) En déduire la distance de N à P .

Exercice 4 - Puissances de matrices.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 : Matrices de taille 2

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 2, u_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse que l'on notera P^{-1} .
2. Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

- Déterminer la matrice D (qui est une matrice diagonale) définie par : $D = P^{-1}AP$.
- Montrer que $A = PDP^{-1}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n . **On ne demande aucune démonstration.**
- En déduire la matrice A^n (sous forme d'un tableau).
- En déduire X_n , puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2 : Matrices de taille 3

On note 0_3 la matrice nulle carrée d'ordre 3, et I_3 la matrice identité d'ordre 3. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Calculer AB . Les matrices A et B sont-elles des matrices inversibles?
- Calculer A^2 puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n en fonction de n .
- Exprimer B^2 comme combinaison linéaire de A et I
 - Montrer que $(A - 3I)^n = (-3)^n I + 3^{n-1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} A^k$ et simplifier cette somme.
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de B^{2n} puis une expression de B^{2n+1} en fonction de n .
- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $C = aA + bB$.
 - En déduire une expression de C^n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on donnera cette expression sous forme de combinaison linéaire de I, A et B en distinguant selon la parité de n).

Exercice 5 - Polynômes.

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes à coefficients réels définie par :

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = X \\ \forall n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket, P_n = XP_{n-1} - P_{n-2} \end{cases}$$

- Déterminer les polynômes P_3 et P_4 .
- Déterminer, en le justifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n . Préciser son coefficient dominant.
- Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

- Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Soit $\theta \in]0; \pi[$. Montrer que

$$\sin(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \theta = \frac{k\pi}{n}$$

- En déduire que pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, le polynôme P_n a exactement $n-1$ racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $] -2, 2[$ et les calculer.
- Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.
- Établir à partir de ce qui précède que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$$