Chapitre 22 : Variables aléatoires sur un univers fini

Table des matières

1 Variables aléatoires

1.1 Définition et exemples

Définition 1.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
On appelle <u>variable aléatoire réelle sur Ω</u> toute fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$X : \left\{ \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array} \right.$$

On note <u>$X(\Omega)$</u> les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

Exemple 2

- On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu. $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.
- On pioche simultanément 3 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de cartes cœur obtenu. $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

Remarque 3

- Malgré son nom, une variable aléatoire n'a rien d'aléatoire.
- On définira l'univers et la probabilité avant la variable aléatoire.

1.2 Evénements associés à une variable aléatoire

Définition 4.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω

Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note <u>$(X \in I)$</u> l'événement $\{w \in \Omega,\ X(w) \in I\}$ et $P(X \in I)$ sa probabilité.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $(X = x)$ l'événement $\{w \in \Omega,\ X(w) = x\}$ et $P(X = x)$ sa probabilité.

On note $(X \leq x)$ l'événement $\{w \in \Omega,\ X(w) \leq x\}$ et $P(X \leq x)$ sa probabilité.

Exemple 5

- On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu.
  $P(X = 2) = P(\{2\}) = \dfrac{1}{6}$.
- On pioche simultanément 3 cartes dans un jeu classique de 32 cartes. Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de cartes cœur obtenu.
  $P(Y = 0) = \dfrac{\text{card}(Y = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}$.
  $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \dfrac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = \dfrac{367}{620}$.

Théorème 6.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
Les événements $(\{X = x\}, x \in X(\Omega))$ forment un système complet d'événements.

1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Remarque 7 Puisque Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ aussi. On peut le voir comme un univers.

Théorème 8.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
La fonction f_X définie sur $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ A \mapsto P(X \in A)\end{array}\right.$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$.

Définition 9.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
On appelle loi de la variable aléatoire X la donnée de $X(\Omega)$ et de la fonction f_X : $\left\{\begin{array}{l}X(\Omega) \to [0,1] \\ x \mapsto P(X = x)\end{array}\right.$

Exemple 10

- On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre obtenu.
$X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \frac{1}{6}$.
- On pioche simultanément 2 cartes dans un jeu classique de 32 cartes.
$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in [\![1,32]\!]^2,\ x_1 \neq x_2\right\}$ et on travaille avec la probabilité uniforme.
Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de cartes cœur obtenu.
$Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$,
$P(Y = 0) = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{69}{124}$,
$P(Y = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{31}$
$P(Y = 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = \frac{31}{124}$.

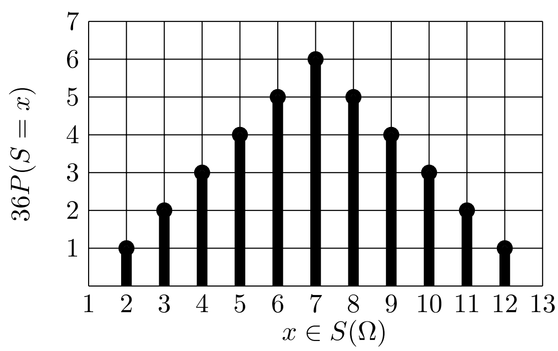
Remarque 11 Deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi sans être égales.

Exemple 12 On lance deux dés à 6 faces et on note S la variable aléatoire représentant la somme des deux résultats obtenus.

La loi de S est donnée par $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$ et

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On peut représenter la loi de S par le diagramme en bâtons suivant.



Théorème 13 (Décomposition en événements simples)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)),\ P(X \in A) = \sum_{x \in A} f_X(x)$$

Remarque 14

1.4 Fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 15.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto P(X \leq t) \end{array} \right.$

Exemple 16 Soit X une variable aléatoire réelle de loi donnée par

$X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et

x	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

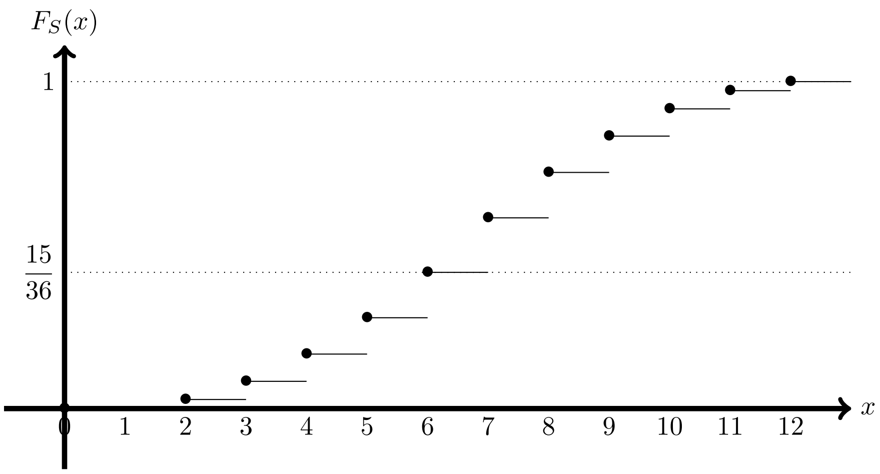
Déterminer la fonction de répartition de X.

Exemple 17 On lance deux dés à 6 faces et on note S la variable aléatoire représentant la somme des deux résultats obtenus.

La loi de S est donnée par $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F_S(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

On trace la fonction de répartition de S et on remarque que c'est une fonction en escalier croissante sur $\mathbb{R}$.



Théorème 18 (Lien entre la fonction de répartition et la loi)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω **avec** $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = P(X \leq n) - P(X \leq n - 1)$$

Théorème 19 (HP)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
La fonction de répartition est positive, croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(t) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F_X(t) = 1$$

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

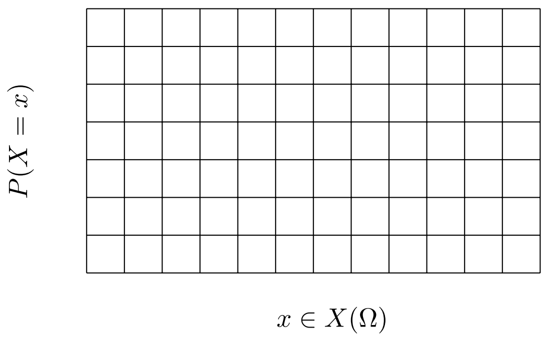
Définition 20.

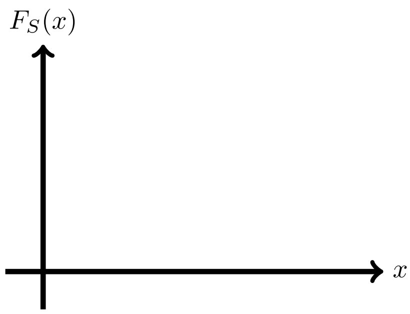
Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
Soit $E \subset \mathbb{R}$, un ensemble **fini**.

On dit que <u>X suit une loi uniforme sur E</u> et on note $X \sim \mathcal{U}(E)$ lorsque :

1. $X(\Omega) = E$
2. $\forall x \in E,\ f_X(x) = P(X = x) = \dfrac{1}{|E|}$.

Par exemple, si $E = [\![1, n]\!]$,





Exemple 21

- On choisit un nombre au hasard entre 1 et 100.
- On lance un dé à 6 faces deux fois de suite et on note X la variable aléatoire représentant le couple obtenu.

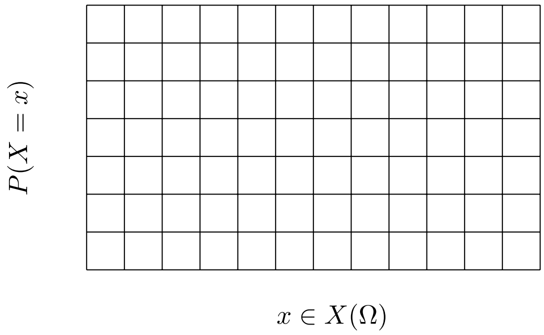
2.2 Loi de Bernoulli

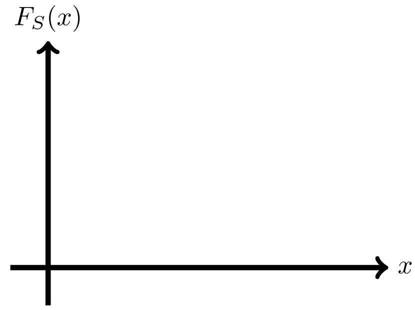
Définition 22.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Soit $p \in [0,1]$.

On dit que <u>X suit une loi de Bernoulli de paramètre p</u> et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ lorsque :

1. $X(\Omega) = \{0,1\}$
2. $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$.





<u>Exemple 23</u> Cette loi est rencontrée lorsqu'on réalise une expérience qui n'a que deux issues possibles. Une est appelée le succès et l'autre l'échec.

- On lance une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le lancer veut pile et 0 sinon.
- On lance un dé à 6 faces et on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le résultat est pair et 0 sinon.

Définition 24.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $A \subset \Omega$.
On appelle <u>indicatrice de A</u> la variable aléatoire réelle notée $\mathbb{1}_A$ et définie par

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{l} \Omega \to \{0,1\} \\ \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Théorème 25.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $A \subset \Omega$.
La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

Théorème 26.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$.

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
3. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

2.3 Loi binomiale

Définition 27.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
Soit $p \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

1. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
2. $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple 28 Cette loi est rencontrée lorsqu'on réalise n fois de façons indépendantes la même expérience à deux issues et qu'on compte le nombre de succès.

- On lance n fois une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de pile obtenu.
  X suit une loi binomiale de paramètres
- On lance n fois un dé à 6 faces et on note Y la variable aléatoire qui représente le nombre de chiffres pairs obtenu.
  Y suit une loi binomiale de paramètres
- On pioche successivement avec remise n boules dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenu.
  X suit une loi binomiale de paramètres

3 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle

3.1 Définition de l'espérance et premiers exemples

Définition 29.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
On appelle espérance de X et on note $E(X)$ la quantité

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$$

Remarque 30 L'espérance représente le « comportement moyen » de la variable aléatoire, une moyenne pondérée par la probabilité de chaque réalisation.

Définition 31.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire sur Ω.
On dit que X est une variable aléatoire centrée lorsque $E(X) = 0$.

Théorème 32.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire sur Ω.

1. Soit E un ensemble fini non vide. Si $X \sim \mathcal{U}(E)$ alors $E(X) = \dfrac{1}{|E|} \sum_{x \in E} x$.
2. Soit $p \in [0,1]$. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
   Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors, $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0,1]$. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$.

3.2 Propriétés de l'espérance

Théorème 33.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. **Linéarité :** $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
   $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX+b) = aE(X) + b$.
2. **Positivité :** Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
3. **Croissance :** Si $X \geq Y$ alors $E(X) \geq E(Y)$.
4. **Inégalité triangulaire :** $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Remarque 34 Si X est une variable aléatoire réelle alors la variable $X - E(X)$ est une variable centrée.

3.3 Formule de transfert

Théorème 35 (Admis)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
Soit f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Remarque 36 On utilise cette formule pour calculer $E(X^2)$ ou $E(X^3)$ par exemple.

Exemple 37 On choisit un nombre au hasard entre 1 et 100. On note X la variable aléatoire représentant le nombre choisi.
Déterminer l'espérance de $Y = (-1)^X$.

3.4 Inégalité de Markov

Théorème 38.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle **positive** sur Ω.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Remarque 39 Si X est de signe quelconque, on applique l'inégalité de Markov à $|X|$.

3.5 Définitions et propriétés de la variance

Définition 40.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle moment d'ordre k de la variable X la quantité $E(X^k)$.

Remarque 41 On peut calculer les moments grâce à la formule de transfert.

Définition 42.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire sur Ω.
On appelle variance de la variable aléatoire X et on note $V(X)$ la quantité

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

On appelle écart−type de la variable aléatoire X et on note $\sigma(X)$ la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 43 La variance et l'écart-type représentent la « dispersion » de la variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.

Définition 44.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire sur Ω.
On dit que X est une variable aléatoire réduite lorsque $V(X) = 1$.

Théorème 45 (Formule de Kœnig-Huygens)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Théorème 46.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Remarque 47

- Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.
- $V(X) = 0$ si, et seulement si, $P(X = E(X)) = 1$. On dit que X est presque sûrement constante.

Théorème 48.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

1. Soit $p \in [0, 1]$. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0, 1]$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.

3.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 49.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle ur Ω.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque 50 On retrouve la mesure de la dispersion autour de la valeur moyenne.

Exemple 51 On dispose d'une pièce de monnaie truquée, la probabilité d'obtenir FACE n'est pas $\frac{1}{2}$.

1. On cherche à estimer la probabilité p d'obtenir FACE. Comment peut-on estimer cette valeur ?
2. A partir de combien de lancers, la méthode proposée donne une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

4 Indépendance de variables aléatoires réelles

4.1 Couple de variables aléatoires indépendantes

Définition 52.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
On dit que les variables X et Y sont indépendantes lorsque

$$\forall (x, y) \in (X(\Omega), Y(\Omega)),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Théorème 53.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
Si X et Y sont indépendantes alors

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Théorème 54.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Soit g une fonction définie sur $Y(\Omega)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

4.2 Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires

Définition 55.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω.
On dit que les variables sont mutuellement indépendantes lorsque

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),\ \forall I \subset [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i = x_i)$$

Définition 56.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω.
On dit que les variables sont deux à deux indépendants lorsque

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes.}$$

Remarque 57 L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. Cependant la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 58 On lance 2 fois une pièce de monnaie. On définit les variables aléatoires suivantes.
$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile au 1er lancer,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$,
$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient face au 2ème lancer,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$,
$Z = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient la même chose aux 2 lancers,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$,
Montrer qu'elles sont 2 à 2 indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

Théorème 59.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Toute sous-famille est encore une famille de variables mutuellement indépendantes.
2. Soit $m \in \mathbb{N}, m \leq n$. Soient f et g deux fonctions.
   Les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.
3. Soient f_1, $\ldots$, f_n des fonctions.
   Les variables aléatoires $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 60 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles.

1. Les variables $X+Y$ et Z sont indépendantes.
2. Les variables X^2, Z^3 et $-Y$ sont mutuellement indépendantes.

4.3 Espérance et variance pour des variables indépendantes

Théorème 61 (Admis)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Théorème 62 (Admis)**.**

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω **mutuellement indépendantes**.

$$E\left(X_1 X_2 \ldots X_n\right) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$$

Théorème 63.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
Si X et Y sont indépendantes alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Théorème 64.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω **mutuellement indépendantes**.

$$\mathrm{Var}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

4.4 Lien entre la loi binomiale et la loi de Bernoulli

Théorème 65.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Alors, la variable aléatoire $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètre n et p.

En particulier, $V(X) = np(1-p)$.