

Exercice 1 Dans chacune des expériences suivantes, déterminer $X(\Omega)$ et reconnaître la loi de X (uniforme, bernoulli, binomiale). Préciser ses paramètres.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires, et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses.
3. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon et d'une fille sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1 pour cent des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. X est le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Correction

1. $X(\Omega) = \llbracket 0, 20 \rrbracket$.

Chacun des 20 objets est dans le premier tiroir avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et on compte le nombre de fois où "être dans le tiroir" est obtenu.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètre 20 et $\frac{1}{3}$.

2. $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$. On choisit au hasard un animal à 0, 1 ou 2 bosses donc X suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, 2 \rrbracket$.

3. $X(\Omega) = \llbracket 1, 32 \rrbracket$. X représente la position de la carte dans le paquet de carte.

Donc, X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 32 \rrbracket$.

4. $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Chacun des 3 enfants est un garçon avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et on compte le nombre de fois où "être un garçon" est obtenu.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{2}$.

5. $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Chacun des 100 trèfles possède 4 feuilles avec une probabilité $\frac{1}{100}$ et on compte le nombre de fois où "avoir 4 feuilles" est obtenu.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètre 100 et $\frac{1}{100}$.

Exercice 2

Un joueur lance deux fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du second lancer.

1. Déterminer les lois de X , $|X|$, X^2 .
2. Calculer l'espérance et la variance des lois X et $|X|$.

Correction

Soit X la variable aléatoire égale à la

$$X : \begin{cases} \Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \rightarrow X(\Omega) \\ (i, j) \mapsto i - j \end{cases}$$

1. (a) La loi de X est la donnée de $X(\Omega) = \llbracket -5, 5 \rrbracket$ et de

- $P(X = -5) = P(X = 5) = \frac{1}{36}$.
- $P(X = -4) = P(X = 4) = \frac{2}{36}$.

- $P(X = -3) = P(X = 3) = \frac{3}{36}$.
- $P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{4}{36}$.
- $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{5}{36}$.
- $P(X = 0) = \frac{6}{36}$.

(b) La loi de $|X|$ est la donnée de $|X|(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et de

- $P(|X| = 5) = \frac{2}{36}$.
- $P(|X| = 4) = \frac{4}{36}$.
- $P(|X| = 3) = \frac{6}{36}$.
- $P(|X| = 2) = \frac{8}{36}$.
- $P(|X| = 1) = \frac{10}{36}$.
- $P(|X| = 0) = \frac{6}{36}$.

(c) La loi de X^2 est la donnée de $X^2(\Omega) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ et de

- $P(X^2 = 25) = \frac{2}{36}$.
- $P(X^2 = 16) = \frac{4}{36}$.
- $P(X^2 = 9) = \frac{6}{36}$.
- $P(X^2 = 4) = \frac{8}{36}$.
- $P(X^2 = 1) = \frac{10}{36}$.
- $P(X^2 = 0) = \frac{6}{36}$.

2. On a

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = 0$$

et

$$V(X) = E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = \frac{1}{36} (25 \times 2 + 16 \times 4 + 9 \times 6 + 4 \times 8 + 1 \times 10) = \frac{202}{36} = \frac{101}{18}.$$

On a

$$E(|X|) = \sum_{y \in |X|(\Omega)} yP(|X| = y) = \frac{1}{36} (5 \times 2 + 4 \times 4 + 3 \times 6 + 2 \times 8 + 1 \times 10) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

et

$$V(|X|) = E(|X|^2) - E(|X|)^2 = \frac{101}{18} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{593}{324}.$$

Exercice 3 Un jugement est soumis au vote d'un jury de 12 membres. Ce jugement doit être voté à la majorité des deux tiers pour devenir exécutoire. Les jurés ont le choix entre deux décisions A et B . Il se déterminent indépendamment les uns des autres et la probabilité de choisir la décision A est θ pour chacun d'eux.

1. Soit X le nombre de jurés prenant la décision A . Déterminer la loi de X .

2. Quelle est la probabilité que la décision A soit adoptée par le jury ?

Correction

1. X permet de compter, parmi les 12 jurés, combien prennent la décision A .
Donc, X suit une loi binomiale de paramètres 12 et θ .
2. Le décision est acceptée lorsque $X \geq 8$.

$$P(X \geq 8) = \sum_{k=8}^{12} \binom{12}{k} \theta^k (1-\theta)^{12-k}$$

Exercice 4 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \dots, N, \dots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle se trouve à la case 0. On note X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où elle a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts.

1. Déterminer la loi de X_1 , puis son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y_n , puis son espérance et sa variance.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n puis son espérance et sa variance.

Correction

1. $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. Le choix entre 1 et 2 est fait aléatoirement donc X suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Donc, $E(X_1) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $V(X) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$.
2. Y_n compte le nombre de fois où le saut a été de 1 case. Donc, Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Donc, $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $V(Y_n) = \frac{n}{4}$.
3. $X_n(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$. Parmi les n sauts que fait la puce,
 - elle fait Y_n saut de 1 case, ce qui la fait avancer de Y_n cases.
 - elle fait $n - Y_n$ saut de 2 cases, ce qui la fait avancer de $2(n - Y_n)$ cases.

Finalement, $X_n = Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$.

$$\forall k \in \llbracket n, 2n \rrbracket, P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - (2n - k)} = \binom{n}{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par les règles de calculs sur l'espérance et la variance, $E(X_n) = 2n - E(Y_n) = \frac{3n}{2}$ et

$$V(X_n) = (-1)^2 V(Y_n) = \frac{n}{4}.$$

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur détraqué :

- si $X \neq 0$, le compteur affiche X .
 - Si $X = 0$, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et n .
1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre affiché sur le compteur.
On pourra commencer par $P(Y = 1)$.
 2. Préciser $E(Y)$ et vérifier que $E(Y) \geq E(X)$.

Correction

1. $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note U la variable aléatoire qui vaut le chiffre choisie au hasard lorsque le tirage a lieu.

$$\begin{aligned}(Y = k) &= (X = k) \cup (X = 0 \cap U = k) \text{ union disjointe} \\ P(Y = k) &= P(X = k) + P(U = k | X = 0)P(X = 0)\end{aligned}$$

Or, sachant $(X = 0)$, U suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc

$$\begin{aligned}(Y = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{1}{n} \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{(1-p)^n}{n}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{k=1}^n k \left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{(1-p)^n}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^n k \frac{(1-p)^n}{n} \\ &= E(X) + \frac{(1-p)^n}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

En particulier, $E(Y) \geq E(X)$.

Exercice 6 Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \lambda k.$$

Déterminer λ , $E(X)$ et $V(X)$.

Correction Il faut que $\sum_{k=1}^n P(X = k) = 1$, donc il faut que

$$\lambda \sum_{k=1}^n k = 1, \text{ i.e. } \lambda = \frac{2}{n(n+1)}.$$

On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^n k^2 = \lambda \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

De plus

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) - \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2 \\ &= \lambda \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{4n^2 + 4n + 1}{9} \\ &= \frac{9n^2 + 9n - 8n^2 - 8n - 2}{18} \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{18} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}.\end{aligned}$$

Exercice 7 Simulations de variables aléatoires réelle

1. Rappeler le moyen de simuler une loi de Bernoulli de paramètre p .
2. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
 - (a) Déterminer μ et n tels que la variable aléatoire $Y = X + \mu$ suive la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - (b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Correction

1. On choisit un nombre au hasard U dans $[0, 1]$.
Si $U \leq p$, on pose $X = 1$. Sinon, on pose $X = 0$.
Alors, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
2. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
 - (a) La variable aléatoire $X - a + 1$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket$.
Donc, en posant $\mu = -a + 1$ et $n = b - a + 1$, la variable aléatoire $Y = X + \mu$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - (b) On a $E(X) = E(Y) - \mu = \frac{n+1}{2} - \mu = \frac{b-a+2}{2} + a - 1 = \frac{b+a}{2}$.
De plus, $V(X) = V(Y) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exercice 8 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On les extrait successivement sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i -ème tirage si la i -ème boule tirée porte le numéro i .

1. Déterminer la probabilité d'une rencontre au premier tirage.
2. Déterminer la probabilité d'une rencontre au second tirage.
3. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer la probabilité qu'il y ait rencontre au i -ème tirage.
On pourra penser aux permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. Déterminer $E(X)$.
on pourra décomposer X en somme de variables de Bernoulli.

Correction

1. On note X_1 la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la boule piochée au 1er tirage. Il y a rencontre au premier tirage lorsque $X_1 = 1$.
Or, X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ donc la probabilité d'une rencontre au premier tirage vaut $\boxed{\frac{1}{n}}$.
2. On note X_2 la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la boule piochée au 2nd tirage. Il y a rencontre au deuxième tirage lorsque $X_2 = 2$.

$$P(X_2 = 2) = P(X_2 = 2 | X_1 \neq 1)P(X_1 \neq 1) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

La probabilité d'une rencontre au deuxième tirage vaut $\boxed{\frac{1}{n}}$.

3. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité qu'il y ait rencontre au i -ème tirage est égale à

$$\frac{\text{nombre de tirage où il y a rencontre au } i\text{-ème tirage}}{\text{nombre de tirage total}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

4. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre au i -ème tirage et 0 sinon. D'après 1), Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. On a $X = \sum_{i=1}^n Y_i$, d'où

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = 1.$$

Le nombre moyen de rencontre est égal à 1.

Exercice 9 Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires.

On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier tirage (respectivement le second tirage) amène une boule blanche, 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2 .
2. Soit $k \in X_1(\Omega)$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(X_2 = 0|X_1 = k)$ et $P(X_2 = 1|X_1 = k)$.
3. En déduire la loi du couple (X_1, X_2) .
4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Correction

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X_1 = 0) = \frac{5}{8}$ et $P(X_1 = 1) = \frac{3}{8}$.
On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_2 = 0 \cap X_1 = 0) + P(X_2 = 0 \cap X_1 = 1) \\ &= P(X_2 = 0|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\text{et } P(X_2 = 1) = \frac{3}{8}.$$

2. On a $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{4}{7}$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{3}{7}$.
On a $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{5}{7}$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{2}{7}$.

3. D'où :

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{20}{56},$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{15}{56},$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{15}{56},$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{6}{56},$$

4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. En effet,

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{28} \neq \frac{9}{64} = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1).$$

Exercice 10 Soit un entier $n \geq 2$.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n .

Dans l'urne numéro k , il y a k boules numérotées de 1 à k .

On choisit une urne au hasard puis dans celle-ci, on pioche une boule au hasard.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(Y = j | X = i)$.
3. En déduire la loi du couple (X, Y) , puis la loi de X et celle de Y .
(on exprimera certaines probabilités sous forme de sommes).
4. Calculer $E(X)$, $E(Y)$.

Correction

1. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.
Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = i) = \frac{1}{n}$.
2. On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $P(Y = j | X = i) = \frac{1}{i}$.
3. On a donc $P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{in} & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
D'où, pour tout $i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \sum_{j=1}^i P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n}$.
D'où, pour tout $j \in Y(\Omega)$, $P(Y = j) = \sum_{i=j}^n P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$.
4. $E(X) = \sum_{i=1}^n iP(X = i) = \frac{n+1}{2}$.
 $E(Y) = \sum_{j=1}^n jP(Y = j) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{j}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{2}$
 $= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} \right) = \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}$.

Exercice 11 On lance n fois une pièce non truquée. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne pile et 0 sinon.

On note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de "pile" au cours des n expériences.

1. Exprimer F_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$.
2. Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0 , on ait $P(0,49 < F_n < 0,51) \geq 95\%$ (on dit alors que $]0,49; 0,51[$ est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95%).

Correction

1. On a $F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
2. $E(F_n) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{2}$ et $V(F_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{4n}$.
3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2},$$

donc, pour $\varepsilon = 0,01$,

$$P(|F_n - 0,5| \geq 0,01) \leq \frac{1}{4n \times 0,01^2},$$

d'où,

$$P(0,49 < F_n < 0,51) \geq 1 - \frac{10^4}{4n}.$$

Afin que l'on ait $P(0,49 < F_n < 0,51) \geq 95\%$, il faut que $1 - \frac{10^4}{4n} \geq 0,95$, i.e.,

$$n \geq \frac{10^4}{0,2} = 5 \times 10^4.$$