# Chapitre 23 : Continuité d'une fonction réelle

## Table des matières

# 1 Continuité locale d'une fonction

## 1.1 Continuité en un point

**Définition 1.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
La fonction $f$ est continue en $a$ lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Lorsque $f$ n'admet pas de limite finie en $a$, on dit que $f$ est discontinue en $a$.

**Exemple 2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Cette fonction est-elle continue en 0 ?

**Exemple 3** Les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

## 1.2 Continuité à gauche et à droite

**Définition 4.**

Soit $I$ et intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
La fonction $f$ est continue à gauche en $a$ lorsque $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
La fonction $f$ est continue à droite en $a$ lorsque $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

**Exemple 5** Etudier la continuité en 1 de la fonction partie entière.

**Théorème 6.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
$f$ est continue en $a$ si, et seulement si, $f$ est continue à gauche et à droite en $a$.

**Exemple 7** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{1}{x}} \text{ pour } x < 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$
Cette fonction est-elle continue en 0 ?

## 1.3 Continuité et suites

**Théorème 8.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en a.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $I$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.
Alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

**Exemple 9** Soit $u$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
Déterminer la nature de la suite $u$.

**Théorème 10** (Théorème du point fixe)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

Si $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in I \\ f \text{ est continue sur } I, \end{array}\right.$ , alors $\ell$ vérifie $\ell = f(\ell)$.

### 1.4 Prolongement par continuité en un point

**Définition 11.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $I = ]a,b[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que <u>$f$ est prolongeable par continuité en $a$</u> lorsque $f$ admet une limite à droite finie en $a$, notée $\ell$.
Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_a : \left\{\begin{array}{l} [a,b[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ pour } x \in ]a,b[ \\ \ell \text{ pour } x = a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On dit que <u>$f$ est prolongeable par continuité en $b$</u> lorsque $f$ admet une limite à gauche finie en $b$, notée $\ell'$.
Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_b : \left\{\begin{array}{l} ]a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ pour } x \in ]a,b[ \\ \ell' \text{ pour } x = b \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Exemple 12** Soit $f$ la définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?

**Exemple 13** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par $f(x) = \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}}$. Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?

**Exemple 14** Montrer que la fonction $x \mapsto x^x$ peut être prolongée par continuité en 0.

# 2 Continuité globale d'une fonction

## 2.1 Définitions et propriétés

**Définition 15.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que la fonction $f$ est <u>continue sur $I$</u> lorsqu'elle est continue en tout point de $I$.

**Définition 16.**

Soit $I$ et intervalle de $\mathbb{R}$.
On note <u>$\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$</u> l'ensemble des fonction définies et continues sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 17.**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$.
Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ alors :

1. pour tout couple de réels $(\lambda, \mu)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $I$.
2. La fonction $fg$ est continue sur $I$.
3. Si $g \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $I$.

**Exemple 18** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

**Théorème 19.**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.
Si $f$ est continue sur $I$ et si $g$ est continue sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur $I$.

**Exemple 20** Soit $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$. Cette fonction est-elle continue sur $D_f$ ?
Si non, sur quel ensemble est-elle continue ?

## 2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 21** (Version 1)**.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.
Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

**Exemple 22** Ecrire une fonction python qui prend en entrée

- deux réels $a$ et $b$
- une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$.
- un paramètre $\epsilon$.

et qui renvoie une valeur approchée à $\epsilon$ près d'une solution de $f(x) = 0$.

**Exemple 23** Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, continue sur $[0, 1]$.
Montrer que $f$ admet une point fixe.

**Théorème 24** (Version générale)**.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$.
Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.
Pour tous les réels $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

**Remarque 25** Il n'y a pas unicité de l'antécédent.

## 2.3 Continuité sur un intervalle

**Théorème 26.**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$.
Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

En particulier,

1. Si $f$ est croissante sur $I$,
   - $I = [a, b] \Rightarrow f(I) = [f(a), f(b)]$.
   - $I = ]a, b] \Rightarrow f(I) = ]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$.
   - $I = [a, b[ \Rightarrow f(I) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
   - $I = ]a, b[ \Rightarrow f(I) = ]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
2. Si $f$ est décroissante sur $I$,
   - $I = [a, b] \Rightarrow f(I) = [f(b), f(a)]$.
   - $I = ]a, b] \Rightarrow f(I) = [f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.
   - $I = [a, b[ \Rightarrow f(I) = ]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$.
   - $I = ]a, b[ \Rightarrow f(I) = ]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$.

**Remarque 27** Dans le cas général, on détermine l'intervalle $f(I)$ à l'aide du tableau de variation de $f$.

**Exemple 28** Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$. Déterminer $f(]0, +\infty[)$.

## 2.4 Continuité sur un segment

**Théorème 29.**

Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$.
Alors, $f(I)$ est un segment dont les bornes sont atteintes.

$$\exists (c, d) \in [a, b]^2 \text{ tels que } f([a, b]) = [f(c), f(d)]$$

*Toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.*

**Exemple 30** Soit la fonction cosinus étudiée sur $[0, 2\pi]$. Alors, $\cos([0, 2\pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)]$.

## 2.5 Théorème de la bijection

**Définition 31.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f$ une application **bijective** de $E$ dans $F$.

$$\forall y \in F,\ \exists!\ x \in E,\ y = f(x).$$

On appelle bijection réciproque de $f$ l'application de $F$ dans $E$ qui a tout élément de $F$ associe son unique antécédent. On la note $f^{-1}$.

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \ y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

**Théorème 32.**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ alors $f$ est une bijection de $I$ dans $f(I)$ (qui est un intervalle) et sa bijection réciproque $f^{-1}$ est continue et de même monotonie que $f$.

## 2.6 Application : tangente et arctangente

**Théorème 33.**

La fonction tan est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 34.**

On appelle fonction arctangente la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan\big(\arctan(x)\big) = x$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x$$

**Exemple 35**

- $\arctan(-1) =$
- $\arctan(1) =$
- $\arctan(\tan(0)) =$
- $\arctan(\tan(\pi)) =$
- $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) =$

**Théorème 36.**

1. La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction arctan est impaire.