Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux points indiqués ?

1. $x \mapsto x\ln(2x)$ en 0.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ en 0.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en 0.
4. $x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$ en 0.
5. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
6. $x \mapsto \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}}$ en 0.
7. $x \mapsto \dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2}$ en 1 et en 2.
8. $x \mapsto \tan(x)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 Etudier la continuité ou le prolongement par continuité des fonctions suivantes aux points demandés.

1. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ en 0.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0.
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ en 2.

Exercice 3 Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $]0,1[$ par $\forall x \in]0,1[\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

1. Montrer que f est bijective de $]0,1[$ dans un intervalle J à préciser.
   On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 [$*$] Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x\ln x + 2$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1}. Indiquer les limites.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$.
   Exprimer x_k à l'aide de la fonction f^{-1}.
6. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
7. Déterminer un équivalent de x_k en $+\infty$.

Exercice 8

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Est-elle prolongeable par continuité en 0 à gauche ?
   (b) Est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?
   (c) Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. $*$ Résoudre $\arctan(x) + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.

   Indication : Sur le bon ensemble, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.