

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux points indiqués ?

1. $x \mapsto x \ln(2x)$ en 0.
2. $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ en 0.
3. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en 0.
4. $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en 0.
5. $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
6. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ en 0.
7. $x \mapsto \frac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2}$ en 1 et en 2.
8. $x \mapsto \tan(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $\frac{\pi}{2}$.

Correction

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(2x) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$ donc f n’est pas prolongeable par continuité en 0.
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc f n’est pas prolongeable par continuité en 0.
5. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x$. Par le théorème d’encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ donc f n’est pas prolongeable par continuité en 0.
7. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
 $\frac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)^2(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2} = 0$.
 Donc f est prolongeable par continuité en 2 en posant $f(2) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2} = +\infty$
 donc f n’est pas prolongeable par continuité en 1.
8. C’est une forme indéterminée $\infty \times 0$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\tan(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Or, $\sin(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ et $\cos(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} 1$. Donc,

$$\tan(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} 1$$

Donc, f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 2 Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points demandés.

1. $g : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$ en 0.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ en 0.
3. $h : x \mapsto \frac{x^{[x]}}{[x]^x}$ en 2.

Correction

1. Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. $g(x) = -1 + (x+1)^2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$.
 Soit $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. $g(x) = x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.
 Or, $g(0) = 0$ donc g est continue en 0.

2. On introduit deux suites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } y_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = \frac{1}{u_n} - \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor = n+1 - [n+1] = 0$ et
 $f(y_n) = \frac{1}{y_n} - \left\lfloor \frac{1}{y_n} \right\rfloor = n + \frac{1}{2} - \left[n + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$. Donc, f n'admet pas de limite en 0.

3. On va utiliser l'écriture exponentielle de la fonction h .

$$\forall x \in [1, +\infty[, h(x) = \frac{\exp(\lfloor x \rfloor \ln(x))}{\exp(x \ln(\lfloor x \rfloor))} = \exp[\lfloor x \rfloor \ln(x) - x \ln(\lfloor x \rfloor)]$$

- $h(2) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor \ln(x) - x \ln(\lfloor x \rfloor) = \ln(2) - 2 \ln(1) = \ln(2)$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor \ln(x) - x \ln(\lfloor x \rfloor) = 2 \ln(2) - 2 \ln(2) = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 1$.

Donc h n'est pas continue en 2.

Exercice 3 Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle sur \mathbb{R} .

Correction Soit P un polynôme de degré impair.

On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$.

En particulier : $\exists A < 0$ tel que $\forall x \leq A$, $P(x) \leq -2$. Donc, $P(A) < 0$.

De même, $\exists B > 0$ tel que $\forall x \geq B$, $P(x) \geq 2$. Donc, $P(B) > 0$.

Le polynôme P est continue sur $[A, B]$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [A, B]$ tel que $P(c) = 0$.

Donc, P admet une racine réelle.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

1. Montrer que f est bijective de $]0, 1[$ dans un intervalle J à préciser.
 On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Correction

1. On va montrer que la fonction f est une fonction continue et strictement monotone sur $]0, 1[$.

(a) **Continuité** : La fonction f est la somme de deux fonctions continue sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

(b) **Stricte monotonie** : La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x(x-1))^2}$.

Ce trinôme n'a pas de racines réelles donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

La fonction f est donc $\text{une bijection de }]0; 1[\text{ dans } f(]0; 1[) =] \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] =] - \infty; +\infty[$.

2. On n'a pas besoin de l'expression de f^{-1} pour déterminer la limite, seulement de la continuité de f^{-1} . Or, la fonction f est continue sur $]0; 1[$ donc la bijection réciproque f^{-1} est continue sur \mathbb{R} .

En particulier, $\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = f^{-1}(0)$.

Par composition de limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0)$.

On résout l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0; 1[$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur \mathbb{R} .

Correction

1. On va le démontrer par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : " \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) "$.

I : Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$. La propriété est vraie au rang 0.

H : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ par hypothèse de récurrence appliquée à $\frac{x}{2}$.

Or, $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f(x)$ par hypothèse sur f donc on a bien $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$.

C : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est une suite constante égale à $f(x)$ par la question précédente.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et la fonction f est continue en 0. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.

Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Ceci est vrai pour tous les réels donc $\text{la fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}$.

Exercice 6 [*] Soit f une fonction continue et périodique sur \mathbb{R} .
Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} .

Correction Notons T une période de f . On a donc $f(\mathbb{R}) = f([0; T])$.

La fonction f est continue sur le segment $[0, T]$ donc elle y est bornée.

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, T], |f(x)| \leq M$.

Donc, $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$. Donc, $f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x \ln x + 2$.

1. Justifier que f est continue sur \mathbb{R}_+^* . Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle que l’on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1} . Indiquer les limites.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier qu’il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$. Exprimer x_k à l’aide de la fonction f^{-1} .
6. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
7. Déterminer un équivalent de x_k en $+\infty$.

Correction

1. La fonction f est une somme de produit de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* donc f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$.

Donc, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

2. La fonction f est une somme de produit de fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R}_+^* donc f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -2x + \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = -2x + \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

On étudie le signe de f'' . $\forall x > 0, f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Donc, f' est croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
$f'(x)$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	

De plus, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ donc f' est négative sur \mathbb{R}_+^* .

Donc, f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$		2	$-\infty$

De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[=]-\infty, 2[$.
4. La bijection réciproque f^{-1} est définie sur $]-\infty, 2[$, à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et elle a la même monotonie que f .

x	$-\infty$		2
$(f^{-1})'(x)$	\parallel	$-$	\parallel
$f^{-1}(x)$	\parallel	$+\infty$	\parallel

\swarrow
 0^+

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. $-k \in f(\mathbb{R}_+^*)$ et f est bijective donc $-k$ admet un unique antécédent dans \mathbb{R}_+^* par f .
Donc, il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$. On a $x_k = f^{-1}(-k)$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}$.
 $-(k+1) < -k$ donc $f^{-1}(-(k+1)) > f^{-1}(-k)$ car f^{-1} est décroissante sur $] -\infty, 2[$.
Donc, $x_{k+1} > x_k$.

Donc, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} -k = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{-1}(-k) = +\infty$

7. On sait que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$. Or, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$ donc, par substitution, $f(x_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -x_k^2$.

Finalement, $-k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -x_k^2$. Donc, $x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{k}$.

Exercice 8

1. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

- (a) Est-elle prolongeable par continuité en 0 à gauche ?
- (b) Est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?
- (c) Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. * Résoudre $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

Indication : Sur le bon ensemble, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

Correction

1. On calcule les limites à gauche et à droite de 0.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc h n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. Cette équation est définie sur \mathbb{R} car la fonction arctangente est définie sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) : \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 3x = 1 - 2x^2 \\ 1 - 2x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ (trinôme)} \\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x \neq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On résout le trinôme. On trouve deux racines réelles $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$. Ces deux racines étant différentes de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Or :

- $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0$ et la fonction arctangente est négative sur \mathbb{R}_- , donc si $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$, alors $\arctan(x) + \arctan(2x) \leq 0$, n'appartient donc pas à l'ensemble $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ n'est pas solution de (E).

- $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$, donc $\frac{1}{4} < \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < \frac{1}{2}$. En particulier, on a : $0 < \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$ et $0 < 2 \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$. Donc, puisque la fonction arctangente est strictement croissante sur \mathbb{R} , et puisque $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,

si $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$, on a $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < \arctan(2x) < \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$(E) \iff x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc le singleton : $S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.