Exercice 1 On lance à dé à 6 faces truqué.
Pour $k \in \{1, \dots, 6\}$, la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k.
Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 2 On lance 6 fois un dé non truqué et bien équilibré.
Déterminer la probabilité d'obtenir les 6 numéros au cours des 6 lancers.

Exercice 3 On distribue 5 cartes d'un jeu de poker (jeu de 52 cartes). Déterminer les probabilités suivantes :

1. d'obtenir un carré (4 cartes de même valeur) ;
2. d'obtenir une couleur (5 cartes de la même couleur ; les couleurs sont cœur, carreau, pique, trèfle)
3. d'obtenir une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent dans l'ordre suivant : A (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valet), Q (dame), K (roi), A ; l'as compte à la fois comme valeur inférieure et comme valeur supérieure).

Exercice 4 On distribue les cartes au bridge (chaque joueur reçoit 13 cartes d'un jeu de 52 cartes).
Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?

Exercice 5 Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, représentant 20% de la population, et ceux qui ont peu d'accidents. Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est $0,5$; pour la seconde catégorie, cette probabilité est $0,1$.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Exercice 6 On dispose d'un dé à 6 faces et de 6 urnes numérotées de 1 à 6. L'urne numéro k comporte k boules blanches et $6-k$ boules noires, les boules étant indiscernables au toucher.
On lance le dé, puis on tire au hasard une boule dans l'urne dont le numéro correspond au résultat du dé. Déterminer la probabilité

1. d'obtenir une boule noire ;
2. que le résultat du dé soit k sachant que la boule tirée est noire.

Exercice 7 Soit $(a, b) \in]0; 1[$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date n ($n \in \mathbb{N}$), il a la probabilité a de fonctionner à la date $n+1$;
- s'il est en panne à la date n ($n \in \mathbb{N}$), il a la probabilité b d'être en panne à la date $n+1$.

On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il soit en état de marche à la date n.
Établir une relation de récurrence sur la suite (p_n), puis en déduire l'expression de p_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On note D l'événement : " la carte tirée est une dame ".
Dans chacun des cas suivants, étudier l'indépendance des événements D et A :

1. A : " la carte est un pique ".
2. A : " la carte est noire " (pique ou trèfle).
3. A : " la carte est une figure " (un roi, une dame ou un valet).
4. A : " la carte n'est pas un as ".
5. A : " la carte est la dame de pique ".

Exercice 9 On lance trois fois de suite une pièce équilibrée, et on considère les événements suivants :
— A : " le premier lancer donne pile " ;
— B : " le deuxième lancer donne face " ;
— C : " les trois lancers donnent le même résultat ".
Étudier l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux des événements A, B et C.

Exercice 10 Une urne U_1 contient deux boules blanches et une boule rouge.
Une urne U_2 contient deux boules rouges et une boule blanche.
On lance un dé : s'il fait 6, on choisit l'urne U_1, et sinon U_2 ; puis on tire deux boules successivement et avec remise dans l'urne qui a été choisie.
On définit les événements :
— B_1 : " la première boule tirée est blanche " ;
— B_2 : " la seconde boule tirée est blanche ".
Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 11 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 12 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement " la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche " et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

<u>Exercice 13</u> On considère un carré ABCD et son centre noté O.
Un jeton est placé sur le sommet A.
A chaque tour, il a une chance équiprobable de rejoindre un de ses voisins.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit en B après un tour ?
2. Après deux tours, quelle est la probabilité que le jeton soit en A ? En B ? en C ? En D ? En O ?
3. Pour tout entier non nul n, on note p_n la probabilité que le jeton soit en 0 après n tours.
   Pour tout entier non nul n, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire l'expression de p_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
5. Sachant que le jeton est en O après 3 tours, quelle est la probabilité qu'il soit passé par B au deuxième tour ?

<u>Exercice 14</u> On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche.
On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne.
Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement " on a obtenu le premier six au $k-$ième lancer du dé ".
   (a) Calculer $P(A_k)$.
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ?
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au $k-$ième lancer ?
2. On appelle B l'événement " on a obtenu la boule blanche en moins de 10 lancers".
   (a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la $k-$ième fois ?
   (b) Calculer $P(B)$.