Exercice 1 On lance à dé à 6 faces truqué.
Pour $k \in \{1, \ldots, 6\}$, la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k.
Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Correction
Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :

- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$.
- Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \Omega$, $P(\{k\}) = \lambda k$.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(\{k\}) = \lambda \sum_{k=1}^{6} k = 21\lambda$, donc $\lambda = \dfrac{1}{21}$.
Soit A l'évènement : "obtenir un nombre pair".
On a : $P(A) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21}$.

Exercice 2 On lance 6 fois un dé non truqué et bien équilibré.
Déterminer la probabilité d'obtenir les 6 numéros au cours des 6 lancers.

Correction
Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :

- $\Omega = \{1, 6\}^6$.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

Soit A l'évènement : "obtenir les 6 numéros au cours des 6 lancers". Le cardinal de A est égal au nombre de permutations de $\{1, \ldots, 6\}$ donc il est égal à $6!$.
Donc, $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{6!}{6^6} = \dfrac{5!}{6^5} = \dfrac{5}{324}$.

Exercice 3 On distribue 5 cartes d'un jeu de poker (jeu de 52 cartes). Déterminer les probabilités suivantes :

1. d'obtenir un carré (4 cartes de même valeur) ;
2. d'obtenir une couleur (5 cartes de la même couleur ; les couleurs sont cœur, carreau, pique, trèfle)
3. d'obtenir une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent dans l'ordre suivant : A (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valet), Q (dame), K (roi), A ; l'as compte à la fois comme valeur inférieure et comme valeur supérieure).

Correction
Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :

- Ω est l'ensemble des tirages simultanés de 5 cartes parmi 52.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

1. Soit A_1 l'évènement : "obtenir un carré (4 cartes de même valeur)".
   Un carré est fixé par la valeur de la carte répétée 4 fois (13 possibilités) et par la dernière carte ($52 - 4 = 48$ possibilités).
   Donc $\text{card}(A_1) = 13 \times 48 = 624$.
   On a : $P(A_1) = \dfrac{\text{card}(A_1)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{624}{\binom{52}{5}} = \dfrac{624}{2598960} = \dfrac{1}{4165}$.
2. Soit A_2 l'évènement : "obtenir une couleur (5 cartes de la même couleur ; les couleurs sont cœur, carreau, pique, trèfle)".
   Une couleur est fixée par la couleur des 5 cartes (4 possibilités) et par les valeurs des cartes dans

cette couleur ($\binom{13}{5}$ possibilités). Donc $\text{card}(A_2) = 4\binom{13}{5} = 5148$.
On a : $P(A_2) = \dfrac{\text{card}(A_2)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{5148}{2598960} = \dfrac{33}{16660}$.

3. Soit A_3 l'évènement : "obtenir une suite (5 cartes dont les valeurs se suivent dans l'ordre suivant : A (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valet), Q (dame), K (roi), A ; l'as compte à la fois comme valeur inférieure et comme valeur supérieure)".
   Une suite est fixé par la valeur de la plus petite carte (10 possibilités) et par la couleur de chaque carte (4^5 possibilités). Donc $\text{card}(A_3) = 10 \times 4^5 = 10240$.
   On a : $P(A_3) = \dfrac{\text{card}(A_3)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{10240}{2598960} = \dfrac{128}{32487}$.

Exercice 4 On distribue les cartes au bridge (chaque joueur reçoit 13 cartes d'un jeu de 52 cartes). Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?

Correction
Soit (Ω, P) l'espace probabilisé associé à l'exercice.
Il vérifie les conditions suivantes :

- Ω est l'ensemble des distributions possibles lors d'une partie de bridge.
- La probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω.

Il y a $\binom{52}{13}$ mains possibles pour le premier joueur, puis $\binom{39}{13}$ mains possibles pour le deuxième joueur, puis $\binom{26}{13}$ mains possibles pour le troisième joueur et $\binom{13}{13}$ mains possibles pour le dernier joueur.
Donc $\text{card}(\Omega) = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$.
Soit A l'évènement : "chaque joueur reçoit un as".
Pour que chaque joueur reçoive un as, il faut choisir la distribution des as (4! possibilités) puis distribuer le restant des cartes ($\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$ possibilités). Donc $\text{card}(A) = 4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$.
On a : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Exercice 5 Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, représentant 20% de la population, et ceux qui ont peu d'accidents. Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est $0,5$; pour la seconde catégorie, cette probabilité est $0,1$.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Correction
On choisit une personne de façon équiprobable parmi les nouveaux clients d'une compagnie d'assurance.
Soit A l'évènement : "cette personne est victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat".
Notons B l'évènement "cette personne est un client enclins aux accidents".
Notons C l'évènement "cette personne est un client qui a peu d'accidents".
Le système (B, C) est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|C)P(C) = 0,5 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8 = 0,18\,.$$

La probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat est de 18%.

Exercice 6 On dispose d'un dé à 6 faces et de 6 urnes numérotées de 1 à 6.
L'urne numéro k comporte k boules blanches et $6-k$ boules noires, les boules étant indiscernables au toucher.
On lance le dé, puis on tire au hasard une boule dans l'urne dont le numéro correspond au résultat du dé. Déterminer la probabilité

1. d'obtenir une boule noire ;
2. que le résultat du dé soit k sachant que la boule tirée est noire.

Correction Soit A l'évènement : "on tire une boule noire".
Pour tout $k \in \{1,\dots,6\}$, notons D_k l'évènement : "le résultat du dé est k".

1. Le système $(D_k)_{k\in\{1,\dots,6\}}$ est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales :
$$P(A)=\sum_{k=1}^{6}P(A|D_k)P(D_k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{6-k}{6}=\frac{1}{36}\times\frac{5\times 6}{2}=\frac{5}{12}.$$
2. D'après la formule de Bayes, pour tout $k \in \{1,\dots,6\}$, on a :
$$P(D_k|A)=\frac{P(A|D_k)P(D_k)}{P(A)}=\frac{1}{6}\times\frac{6-k}{6}\times\frac{12}{5}=\frac{6-k}{15}.$$

Exercice 7 Soit $(a,b)\in]0;1[$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date n ($n\in\mathbb{N}$), il a la probabilité a de fonctionner à la date $n+1$;
- s'il est en panne à la date n ($n\in\mathbb{N}$), il a la probabilité b d'être en panne à la date $n+1$.

On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0 et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il soit en état de marche à la date n.
Établir une relation de récurrence sur la suite (p_n), puis en déduire l'expression de p_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction
On suppose que a et b sont différents de 0 et de 1.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
Soit A_n l'évènement : "l'appareil fonctionne à la date n".
On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0 et on note $p_n=P(A_n)$ la probabilité qu'il soit en état de marche à la date n.
(Supposons que $p_n\neq 0$ et $p_n\neq 1$)
Le système $(A_n,\overline{A_n})$ est un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales : $p_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(\overline{A_n})P(A_{n+1}|\overline{A_n})=ap_n+(1-b)(1-p_n)=(a+b-1)p_n+1-b$. *(Formule reste vraie pour $p_n=0$ et $p_n=1$)*
La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique.
En posant $r=\dfrac{1-b}{2-a-b}$, on a :
$$p_n=(a+b-1)^n(p_0-r)+r=(a+b-1)^n\left(1-\frac{1-b}{2-a-b}\right)+\frac{1-b}{2-a-b}.$$
Comme $|(a+b-1)|<1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

<u>Exercice 8</u> On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On note D l'événement : " la carte tirée est une dame ".
Dans chacun des cas suivants, étudier l'indépendance des événements D et A :

1. A : " la carte est un pique ".
2. A : " la carte est noire " (pique ou trèfle).
3. A : " la carte est une figure " (un roi, une dame ou un valet).
4. A : " la carte n'est pas un as ".
5. A : " la carte est la dame de pique ".

<u>Correction</u>
On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On note D l'événement : " la carte tirée est une dame ". On a $P(D) = \dfrac{1}{13}$.

1. A : " la carte est un pique ".
   $P(A \cap D) = \dfrac{1}{52}$ et $P(A) = \dfrac{1}{4}$, donc $P(A \cap D) = P(A) \times P(D)$, d'où A et D sont indépendants.
2. A : " la carte est noire " (pique ou trèfle).
   $P(A \cap D) = \dfrac{2}{52}$ et $P(A) = \dfrac{1}{2}$, donc $P(A \cap D) = P(A) \times P(D)$, d'où A et D sont indépendants.
3. A : " la carte est une figure " (un roi, une dame ou un valet).
   $P(A \cap D) = \dfrac{1}{13}$ et $P(A) = \dfrac{3}{13}$, donc $P(A \cap D) \neq P(A) \times P(D)$, d'où A et D ne sont pas indépendants.
4. A : " la carte n'est pas un as ".
   $P(A \cap D) = \dfrac{1}{13}$ et $P(A) = \dfrac{12}{13}$, donc $P(A \cap D) \neq P(A) \times P(D)$, d'où A et D ne sont pas indépendants.
5. A : " la carte est la dame de pique ".
   $P(A \cap D) = \dfrac{1}{52}$ et $P(A) = \dfrac{1}{52}$, donc $P(A \cap D) \neq P(A) \times P(D)$, d'où A et D ne sont pas indépendants.

<u>Exercice 9</u> On lance trois fois de suite une pièce équilibrée, et on considère les événements suivants :

— A : " le premier lancer donne pile " ;
— B : " le deuxième lancer donne face " ;
— C : " les trois lancers donnent le même résultat ".

Étudier l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux des événements A, B et C.

<u>Correction</u>
Les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants. En effet, l'évènement $A \cap B \cap C$ est l'évènement impossible, d'où $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$.
Cependant, les évènements sont deux à deux indépendants. En effet,

- $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = P(A) \times P(B)$.
- $P(B \cap C) = \dfrac{1}{8} = P(B) \times P(C)$.
- $P(A \cap C) = \dfrac{1}{8} = P(A) \times P(C)$.

<u>Exercice 10</u> Une urne U_1 contient deux boules blanches et une boule rouge.
Une urne U_2 contient deux boules rouges et une boule blanche.
On lance un dé : s'il fait 6, on choisit l'urne U_1, et sinon U_2 ; puis on tire deux boules successivement et avec remise dans l'urne qui a été choisie.
On définit les événements :

— B_1 : " la première boule tirée est blanche " ;
— B_2 : " la seconde boule tirée est blanche ".
Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Correction
Notons D_6 l'événement "le dé donne 6". Le système $(D_6, \overline{D_6})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1) = P(B_2) = P(D_6)P(B_1|D_6) + P(\overline{D_6})P(B_1|\overline{D_6}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18},$$

et

$$P(B_1 \cap B_2) = P(D_6)P(B_1 \cap B_2|D_6) + P(\overline{D_6})P(B_1 \cap B_2|\overline{D_6})$$

.
Or, sachant D_6 ou $\overline{D}_6$, les événements B_1 et B_2 sont indépendants puisque les tirages s'effectuent avec remise dans la même urne. Donc,

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{54} = \frac{1}{6}.$$

D'où $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) \times P(B_2)$.
Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

Exercice 11 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Correction

1. On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.
   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :
   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
   On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

Donc $p_n = \dfrac{\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\times\dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.
   Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

Exercice 12 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement " la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche " et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Correction

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1-p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.
On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

Exercice 13 On considère un carré ABCD et son centre noté O.
Un jeton est placé sur le sommet A.
A chaque tour, il a une chance équiprobable de rejoindre un de ses voisins.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit en B après un tour ?
2. Après deux tours, quelle est la probabilité que le jeton soit en A ? En B ? en C ? En D ? En O ?
3. Pour tout entier non nul n, on note p_n la probabilité que le jeton soit en 0 après n tours.
   Pour tout entier non nul n, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire l'expression de p_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
5. Sachant que le jeton est en O après 3 tours, quelle est la probabilité qu'il soit passé par B au deuxième tour ?

Correction

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on va noter X_n l'événement "le jeton est au point X après le $n-$ième tour".
   D'après l'énoncé, l'événement A_0 est un événement certain.
   Le point A a 3 voisins et le jeton se déplace de façon aléatoire (donc avec une probabilité uniforme) sur l'un de ces voisins. Ainsi, $P(B_1) = P(O_1) = P(D_1) = \frac{1}{3}$.
2. Les événements B_1, O_1 et D_1 forment un système complet d'événements.
   D'après la formule des probabilités totales,
   $$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 \cap B_1) + P(A_2 \cap O_1) + P(A_2 \cap D_1) \\ &= P(A_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|O_1)P(O_1) + P(A_2|D_1)P(D_1) \end{aligned}$$
   Or, les sommets B et D ont 3 voisins donc $P(A_2|B_1) = P(A_2|D_1) = \frac{1}{3}$.
   Le centre O a 4 voisins donc $P(A_2|O_1) = \frac{1}{4}$.
   Finalement,
   $$\begin{aligned} P(A_2) &= \frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$
   Le seul moyen d'être en B après le deuxième tour est d'être passé en O au premier tour donc
   $$P(B_2) = P(B_2 \cap O_1) = P(B_2|O_1)P(O_1) = \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$
   Le seul moyen d'être en D après le deuxième tour est d'être passé en O au premier tour donc
   $$P(D_2) = P(D_2 \cap O_1) = P(D_2|O_1)P(O_1) = \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$
   Pour la probabiliotés de C_2,
   $$\begin{aligned} P(C_2) &= P(C_2 \cap B_1) + P(C_2 \cap O_1) + P(C_2 \cap D_1) \\ &= P(C_2|B_1)P(B_1) + P(C_2|O_1)P(O_1) + P(C_2|D_1)P(D_1) \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$
   Finalement, $P(O_2) = 1 - 2.\frac{11}{36} - 2.\frac{1}{12} = \frac{2}{9}$.
   (On aurait pu retrouver ce résultat par la formule des probabilités totales).

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $p_n = P(O_n)$.
Les événements A_n, B_n, C_n, D_n et O_n forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(O_{n+1}) &= P(O_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(O_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(O_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &+ P(O_{n+1}|D_n)P(D_n) + P(O_{n+1}|O_n)P(O_n) \end{aligned}$$

Or, $P(O_{n+1}|O_n) = 0$ donc

$$\begin{aligned} P(O_{n+1}) &= \frac{1}{3}\left(P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n)\right) \\ p_{n+1} &= \frac{1}{3}(1 - P(O_n)) = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{aligned}$$

4. On reconnait une suite arithmético-géométrique.
Par la méthode classique, on obtient comme point fixe $\ell = \frac{1}{4}$.
La suite $\left(p_n - \frac{1}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{-1}{3}$ et de premier terme $p_1 - \ell = \frac{1}{12}$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{12}.\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}$.
5. On cherche à calculer la probabilité suivante $P(B_2|O_3)$. On va utiliser la formule de Bayes.

$$P(B_2|O_3) = \frac{P(O_3|B_2)P(B_2)}{P(O_3)} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{12}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}.\frac{1}{27}} = \frac{9}{80}$$

Exercice 14 On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne.
Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement " on a obtenu le premier six au $k-$ième lancer du dé ".
   (a) Calculer $P(A_k)$.
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ?
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au $k-$ième lancer ?
2. On appelle B l'événement " on a obtenu la boule blanche en moins de 10 lancers".
   (a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la $k-$ième fois ?
   (b) Calculer $P(B)$. On donnera le résultat sous forme de somme.

Correction

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on va noter D_i l'événement obtenir un 6 au $i-$ième lancer.

$$P(A_k) = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_{k-1}} \cap D_k)$$

Les lancers sont indépendants donc les événements D_i le sont également. Donc,

$$P(A_k) = P(\overline{D_1})P(\overline{D_2})\ldots P(\overline{D_{k-1}})P(D_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.\frac{1}{6}.$$

(b) On cherche à calculer la probabilité suivante $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
Les trois événements sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} . \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} . \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{6} . \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

(c) On raisonne exactement comme dans la question précédente.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} . \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} . \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i} \\ &= \frac{1}{6} . \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k \end{aligned}$$

2. (a) Pour chacun des $k-1$ lancers qui n'ont pas donné de 6, on a jouté une boule rouge.
Il y a donc une boule blanche et $k-1$ boules rouges dans l'urne avant le $k-$ième lancer.

(b) Les événements $(A_i)_{i \in [\![1,10]\!]}$ forment un système complet d'événements .
Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{10} P(B|A_k) P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} . \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} . \frac{1}{6} = \frac{1}{6} . \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} . \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \end{aligned}$$