

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Donner la définition de f est continue en a .

2. Citer le théorème des valeurs intermédiaires.

3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Que pouvez-vous dire de $f([a, b])$?

4. Exercices

(a) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

Montrer que f réalise une bijection de $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ dans un intervalle J à préciser.

(b) Soit $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

4) a) f est dérivable sur $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur non nul et $\forall x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} > 0$

donc f est continue et strictement croissante sur $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$. Par le thm de la bijection, f est une bijection de $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x), \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) \right[= \left] 1, +\infty \right[$.

b) g est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit puis quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}. \text{ Or, } \frac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0

donc $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Donner la définition de f est continue en a .
2. Citer le théorème de la bijection.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Que pouvez-vous dire de $f(I)$?
4. Exercices

(a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3 Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

2 Montrer que g réalise une bijection de $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ dans un intervalle J à préciser.

4) a) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composé puis produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1/x^2}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

Par CC, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x^2}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) g est continue sur $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

g est strictement croissante sur $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ comme inverse d'une fonction strictement décroissante.

Par le thm de la bijection, g est une bijection de $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \right[=] -\infty, -1 [$.