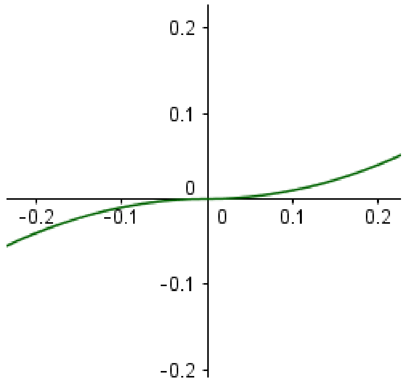
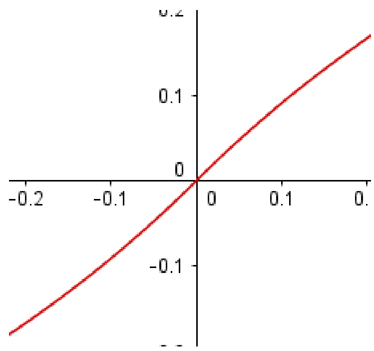
Exercice 1 Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x|x|$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Le seul point à regarder en détail est 0.
Soit $x \neq 0$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \text{ et } \lim_{x\to 0} |x| = 0$$
On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.


2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Le seul point à étudier en détail est 0.
Soit $x \neq 0$.
$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1}{|x|+1} \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|+1} = 1$$
On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 1$.


3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Le seul point à regarder en détail est 0.
Soit $x \neq 0$.
$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
Or, la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$ donc h n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 1$.

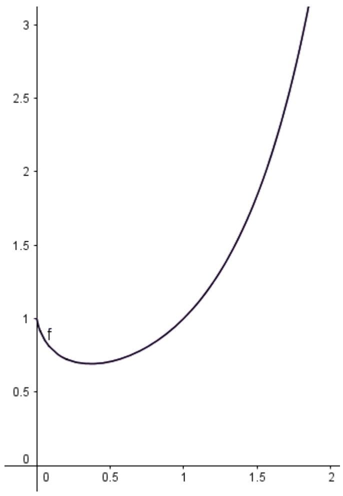
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

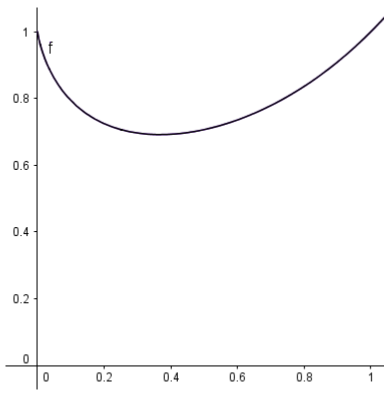
Correction

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \exp(x\ln(x))$.
   La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Etude en 0
   $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x\ln(x)) = 1$. La fonction f est continue en 0.



2. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = (x\ln(x))'\exp(x\ln(x)) = (\ln(x)+1)\exp(x\ln(x))$$
3. On va déterminer la limite du taux d'accroissement en 0.
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^x-1}{x-0} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(x)}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$$
   Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc, la fonction f n'est pas dérivable en 0 et admet une tangente verticale en 0.



Exercice 3 Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \mathbf{e}^{\mathbf{e}^x}$
2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
4. $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$
5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}{\mathrm{sh}(x) + \sin(x)}$

Correction

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (\mathbf{e}^x)'\mathbf{e}^{\mathbf{e}^x} = \mathbf{e}^x\mathbf{e}^{\mathbf{e}^x} = \mathbf{e}^{x+\mathbf{e}^x}$$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(x)\right)$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par produit, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)'\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) = \left(\frac{-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$$

3. $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[,\ \dfrac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}^*$ donc la fonction f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, la fonction f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et

$$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[,\ f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

4. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (\mathrm{sh}(x))'.\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

5. La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x) - \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x) + \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Cherchons les points où cette fonction s'annule.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{sh}(x) + \sin(x))' = \mathrm{ch}(x) + \cos(x)$$

La dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0 donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule qu'en 0.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) &= \frac{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2 - (\mathrm{ch}(x)-\cos(x))(\mathrm{ch}(x)+\cos(x))}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2}\\ &= \frac{\mathrm{sh}^2(x) + 2\mathrm{sh}(x)\sin(x) + \sin^2(x) - \mathrm{ch}^2(x) + \cos^2(x)}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2} = \frac{2\mathrm{sh}(x)\sin(x)}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2}\end{aligned}$$

Exercice 4 Soient sh et ch les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Montrer que sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à déterminer.
   On note argsh sa bijection réciproque.
3. Justifier que argsh est dérivable sur J et déterminer sa dérivée en fonction de ch.
4. En remarquant que $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. * Déterminer une expression de argsh.

Correction

1. sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$.
2. Donc sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Par le théorème de la bijection, sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J =]\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x); \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)[= \mathbb{R}$.
3. sh est une dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule par sur $\mathbb{R}$ donc sa bijection réciproque argsh est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = (\mathrm{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'[\mathrm{argsh}(x)]} = \frac{1}{\mathrm{ch}[\mathrm{argsh}(x)]}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{4} = \frac{2\mathrm{e}^x.2\mathrm{e}^{-x}}{4} = 1$$

   Donc, $\mathrm{ch}^2(x) = 1 + \mathrm{sh}^2(x)$. Or, ch$> 0$ donc $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}$.
   En particulier, $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x))} = \sqrt{1+x^2}$.
   Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.
5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2y \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = 2y\mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0 \text{ en posant } X = \mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow X = \frac{2y + \sqrt{4(y^2+1)}}{2} \text{ ou } X = \frac{2y - \sqrt{4(y^2+1)}}{2} < 0 \text{ donc impossible} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1} \\
&\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)
\end{aligned}$$

   Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}(x) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$.

Exercice 5 Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Montrer que $\forall t \in]0, 1[,\ \exists\, c \in]t, 1[$ tel que $\dfrac{t^\alpha - 1}{t - 1} = \alpha.c^{\alpha-1}$.

2. En déduire que $\forall t \in]0,1],\ t^\alpha \leq \alpha(t-1)+1$.

Correction

1. Soit $t \in]0,1[$.
La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $[t,1]$ et dérivable sur $]t,1[$.
Par le théorème des accroissements finis, $\exists\, c \in]t,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$,
donc $\alpha.c^{\alpha-1} = \dfrac{t^\alpha - 1}{t-1}$.
2. Soit $c \in]0,1[$ dont l'existence est assurée par la question précédente.
$c^{\alpha-1} = \mathbf{e}^{(\alpha-1)\ln(c)}$. Or, $\alpha - 1 < 0$ et $\ln(c) < 0$ donc $(\alpha-1)\ln(c) > 0$. Donc, $c^{\alpha-1} > 1$.
Donc, $\dfrac{t^\alpha-1}{t-1} > \alpha$. Or, $t-1<0$ donc $t^\alpha - 1 < \alpha(t-1)$. Donc, $t^\alpha \leq \alpha(t-1)+1$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(x)$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à déterminer.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
3. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\arctan(u_n)}{2} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction

1. La fonction arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f aussi.
Par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.
2. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $0 \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.
Donc, par définition d'une bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. De plus, $f(0) = 0$ donc 0 est l'unique solution.
3. (a) On le fait par récurrence en utilisant la croissance de f.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On va appliquer l'égalité des accroissements finis au segment $[0, u_n]$.
   La fonction f est continue sur $[0,u_n]$, dérivable sur $]0,u_n[$.
   Par l'égalité des accroissements finis, $\exists c_n \in]0,u_n[$ tel que $f'(c_n) = \dfrac{f(u_n)-f(0)}{u-n-0} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)} \leq \dfrac{1}{2}$.
   Donc, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$. Donc, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
   (c) On le fait par récurrence.
   (d) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
   Par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?
   Préciser f' sur son ensemble de définition.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$? De classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$?

Correction

1. $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ par croissance comparée.
   Par somme, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Donc, f est continue en 0.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 - 2x\ln(x) - x$.
   $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 1 - x\ln(x) = 1$.
   Donc f est également dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
   Finalement, $f' : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 - 2x\ln(x) - x \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$
3. On remarque que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = f'(0)$. Donc, f' est continue en 0. De plus, f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(2)}(x) = -2\ln(x) - 2 - 1 = -2\ln(x) - 3$.
   $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} -2\ln(x) - 1 = +\infty$. Donc, f' n'est pas dérivable en 0. Donc, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.