

**Exercice 1** Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  ?

1.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$
2.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$
3.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$
4.  $F = \{(x, 2x, -x), x \in \mathbb{R}\}$
5.  $F = \{(x, y, y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
6.  $F = \{(x, y, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

**Correction** Pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, on peut l'écrire comme un ensemble de combinaisons linéaires ou utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels (thm 16).

1.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\} = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1))$   
donc c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $(1, 0) \in F$ ,  $(0, 1) \in F$  et pourtant  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$  donc  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $(1, 0) \in F$ ,  $(0, 1) \in F$  et pourtant  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$  donc  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
4. On va vérifier les deux points de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (thm 16).
  - (a)  $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 2 \cdot 0, -0)$  donc  $0_{\mathbb{R}^3} \in F$  donc  $F$  est non vide.
  - (b) Soit  $(u, v) \in F^2$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .  
 $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u = (x, 2x, -x)$  et  $v = (y, 2y, -y)$ .  
 $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda(x, 2x, -x) + \mu(y, 2y, -y) = (\lambda \cdot x + \mu \cdot y, 2(\lambda \cdot x + \mu \cdot y), -(\lambda \cdot x + \mu \cdot y))$ . Donc,  
 $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$ .

$F$  est non vide et stable par combinaison linéaire donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
5. On va vérifier les deux points de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (thm 16).
  - (a)  $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0 - 0)$  donc  $0_{\mathbb{R}^3} \in F$  donc  $F$  est non vide.
  - (b) Soit  $(u, v) \in F^2$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .  
 $\exists (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $u = (x_1, y_1, y_1 - x_1)$  et  $v = (x_2, y_2, y_2 - x_2)$ .  
 $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda(x_1, y_1, y_1 - x_1) + \mu(x_2, y_2, y_2 - x_2)$   
 $= (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2, (\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) - (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2))$ .  
 Donc,  $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$ .

$F$  est non vide et stable par combinaison linéaire donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
6.  $(0, 0, 3) \in F$  et  $(1, 1, 3) \in F$ . Pourtant,  $(0, 0, 3) + (1, 1, 3) = (1, 1, 6) \notin F$ . Donc  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exercice 2

1. Ecrivez les ensembles suivants comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs à déterminer. (on parlera de famille génératrice)
  - (a) Dans  $E = \mathbb{R}^3$  :  $H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
  - (b) Dans  $E = \mathbb{R}^n$  :  $G = \{(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$
  - (c) Dans  $E = \mathbb{R}^3$  :  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$
2. Déterminer  $H \cap R$ . Est-ce un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  ?

## Correction

1.
  - (a)  $H = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1 - 3))$
  - (b)  $G = \text{Vect}((1, 1, \dots, 1, 1))$
  - (c)  $R = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$
2.
  - Soit  $v \in H \cap R$ .  
 Comme  $v \in H$ , il existe donc  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , tel que  $v = (a - b, a + b, a - 3b)$ .  
 Comme  $v \in R$ ,  $a - b + a + b - a + 3b = 0$  i.e.  $a + 3b = 0$ . D'où  $v = (-4b, -2b, -6b)$ .  
 Donc  $v \in \text{Vect}((2, 1, 3))$ .  
 Donc  $H \cap R \subset \text{Vect}((2, 1, 3))$ .

- En prenant  $a = \frac{3}{2}$  et  $b = -\frac{1}{2}$ , on remarque que  $(2, 1, 3) \in H$ .  
De plus,  $2 + 1 - 3 = 0$  donc  $(2, 1, 3) \in R$ .  
Donc  $\text{Vect}((2, 1, 3)) \subset H \cap R$ .

D'où  $H \cap R = \text{Vect}((2, 1, 3))$ .

C'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

On peut aussi l'affirmer en disant que  $H \cap R$  est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 3** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on note  $e_1 = (1, -1, 1, 2)$  et  $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$

1. Exprimer  $\text{Vect}(e_1, e_2)$ .
2. Soit  $u = (-2, x, y, 3)$ .  
A quelle condition sur  $(x, y)$  est-ce que  $u$  est une combinaison linéaire de  $e_1$  et de  $e_2$  ?

### Correction

1.  $\text{Vect}(e_1, e_2) = \{\lambda.e_1 + \mu.e_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda - \mu, -\lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu, 2\lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .
2. Soit  $u = (-2, x, y, 3)$ .

$$\begin{aligned} u \in \text{Vect}(e_1, e_2) &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } u = (\lambda - \mu, -\lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu, 2\lambda + \mu) \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} -2 = \lambda - \mu \\ x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ 3 = 2\lambda + \mu \end{cases} \end{aligned}$$

La première et la dernière ligne permettent de déterminer les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  qui conviennent avec  $L_1 \Leftarrow L_1 + L_4$  et  $L_4 \Leftarrow L_4 - 2L_1$ .

$$\begin{cases} -2 = \lambda - \mu \\ 3 = 2\lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda = -1 \\ -3\mu = -7 \end{cases}$$

Donc,  $\lambda = \frac{1}{3}$  et  $\mu = \frac{7}{3}$ . On en déduit ensuite que  $x = \frac{13}{3}$  et  $y = \frac{22}{3}$ .

**Exercice 4** Reprendre les quatre ensembles de l'exercice 2 et en donner une base.

**Correction** Chacune des familles proposées est une famille libre donc ce sont des bases des sous-espaces vectoriels.

**Exercice 5** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Comparer (en terme d'inclusion) les ensembles suivants :  $\text{Vect}(u, v)$ ,  $\text{Vect}(u)$  et  $\text{Vect}(u, \lambda.u)$ .

### Correction

- $\text{Vect}(u) = \{\lambda_1.u, \lambda_1 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1.u + 0.v, \lambda_1 \in \mathbb{R}\} \subset \{\lambda_1.u + \lambda_2.v, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$   
donc  $\text{Vect}(u) \subset \text{Vect}(u, v)$ .
- $\text{Vect}(u, \lambda.u) = \{\lambda_1.u + \lambda_2(\lambda.u), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda_1 + \lambda.\lambda_2)u, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{\lambda_1.u, \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$   
Donc,  $\text{Vect}(u, \lambda.u) = \text{Vect}(u)$

**Exercice 6** Les familles suivantes sont-elles des familles libres de  $\mathbb{R}^3$  ?

1.  $e_1 = (1, 0, 1)$  et  $e_2 = (1, 2, 2)$ .
2.  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$  et  $e_3 = (1, 1, 1)$ .
3.  $e_1 = (1, -1, 1)$ ,  $e_2 = (2, -1, 3)$  et  $e_3 = (-1, 1, -1)$ .
4.  $e_1 = (1, 2, 1)$ ,  $e_2 = (2, 1, -1)$  et  $e_3 = (1, -1, -2)$ .

Correction

1. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ .

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La famille  $(e_1, e_2)$  est libre.

2. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ .

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre.

3.  $e_1 = e_3$  donc la famille est liée. Elle n'est pas libre.

4. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 2, 1) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(1, -1, -2) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a une infinité de solution donc la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  n'est pas libre, elle est liée.

On a, par exemple,  $e_1 - e_2 + e_3 = 0$ .

**Exercice 7** Parmi les familles suivantes, lesquelles sont génératrices de  $\mathbb{R}^3$ ?

- $e_1 = (1, 0, 0)$  et  $e_2 = (0, 1, 0)$
- $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 2)$ .
- $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$  et  $e_3 = (1, 1, 1)$ .
- $e_1 = (0, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 0, 1)$  et  $e_3 = (1, 1, 0)$ .

Correction

- $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Donc,  $(0, 0, 1) \notin \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ .  
Ce n'est pas une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
- $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)) = \{(x, y, 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, y, \tilde{z}) \mid (x, y, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3$ .  
C'est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
- On va écrire les vecteurs de la base canonique comme combinaison linéaire des trois vecteurs proposés.  
 $(1, 0, 0) = e_1$ ,  $(0, 1, 0) = e_2 - e_1$  et  $(0, 0, 1) = e_3 - e_2$ .  
Donc,  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ .  
Or,  $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$  donc,  $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$ .
- On va raisonner par analyse et synthèse. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  
**A :** Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = \lambda_1 + \lambda_3 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{z - x + y}{2} \\ \lambda_2 = \frac{x - y + z}{2} \\ \lambda_3 = \frac{y - z + x}{2} \end{cases}$$

$$\textbf{S :} \text{ Posons } \lambda_1 = \frac{z - x + y}{2}, \lambda_2 = \frac{x - y + z}{2} \text{ et } \lambda_3 = \frac{y - z + x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 &= \frac{z-x+y}{2}(0, 1, 1) + \frac{x-y+z}{2}(1, 0, 1) + \frac{y-z+x}{2}(1, 1, 0) \\ &= \left(0, \frac{z-x+y}{2}, \frac{z-x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y+z}{2}, 0, \frac{x-y+z}{2}\right) + \left(\frac{y-z+x}{2}, \frac{y-z+x}{2}, 0\right) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Donc, la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . C'est même une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 8** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 1, 1)$ .

1. Rappeler la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Donner les coordonnées du vecteur  $u = (8, 4, 2)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

### Correction

1. Il s'agit de la famille  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .
2. On doit donc montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . On va commencer par génératrice en utilisant la méthode d'analyse et synthèse.

(a) **Analyse** Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  exprimé dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Supposons qu'il existe  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ .

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ x_3 = a_1 + a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_1 - a_1 \\ a_1 = x_2 - (x_1 - a_1) - (x_3 - a_1) \\ a_3 = x_3 - a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_2 - x_3 \\ a_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ a_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Donc, s'il existe une décomposition dans la famille  $(e_1, e_2, e_3)$ , elle est unique et donnée par le système précédent.

(b) **Synthèse** Soit  $x \in \mathbb{R}^3$  dont les coordonnées dans la base canonique sont  $(x_1, x_2, x_3)$ .

On a bien  $x = (x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (x_2 - x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$

On a donc trouvé une écriture de  $x \in \mathbb{R}^3$  comme combinaison linéaire de la famille  $(e_1, e_2, e_3)$ . C'est donc une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

De plus, la décomposition est unique donc c'est également une famille libre.

C'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

3. Par la question précédente,  $(8, 4, 2) = 6e_1 + 2e_2 - 4e_3$ .

### Exercice 9

1. Montrer que la famille  $(e_1 = (2, 1, 1), e_2 = (1, 4, 3), e_3 = (0, 1, 1), e_4 = (1, 2, 3))$  forme une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Trouver une base extraite de cette famille.

### Correction

1. Notons  $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .

$$(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(e_1 - e_3), \quad (0, 1, 0) = \frac{1}{2}(e_2 - e_4) \text{ et } (0, 0, 1) = e_3 - \frac{1}{2}(e_2 - e_4).$$

Donc,  $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^3$ . Donc,  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Etudions la liberté de cette famille.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\sum_{k=1}^4 \lambda_i \cdot e_i = 0_{\mathbb{R}^4}$ .

$$\text{Donc, } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \text{ Donc, } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 5\lambda_2 + 2\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{cases} \text{ Donc, } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_3 + 20\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_2 = \lambda_4 \\ \lambda_3 = -5\lambda_4 \end{cases}$$

Donc, la famille n'est a priori pas liée. En effet,  $e_1 - e_2 + 5e_3 - e_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

Donc,  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ .

On étudie de nouveau la liberté.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\sum_{k=1}^3 \lambda_i \cdot e_i = 0_{\mathbb{R}^4}$ .

$$\text{Donc, } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Donc, } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 7\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Donc, } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc, la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .