Chapitre 26 : Espaces vectoriels (prof)

Table des matières

1 Structure de $\mathbb{R}^n$ **2**
1.1 Définition . . . 2
1.2 Lois de compositions interne et externe sur $\mathbb{R}^n$ . . . 2
1.3 Stabilité par combinaison linéaire . . . 3

2 Structure de sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ **4**
2.1 Partie de $\mathbb{R}^n$ stable par combinaisons linéaires . . . 4
2.2 Sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ . . . 5
2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs . . . 6
2.4 Intersection de sous-espaces vectoriels . . . 7

3 Familles de vecteurs dans un espace vectoriel **8**
3.1 Familles génératrices d'un sous−espace vectoriel . . . 8
3.2 Familles liées, familles libres . . . 9
3.3 Bases d'un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ . . . 10

4 Espaces vectoriels (HP en première année) **13**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé dans tout le chapitre.

1 Structure de $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition

Définition 1.

On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets formés de réels

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On les note $x = (x_1, \dots, x_n)$
On appelle vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ le vecteur défini par : $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.

1.2 Lois de compositions interne et externe sur $\mathbb{R}^n$

Définition 2.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle somme de x et de y et on note $x + y$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

On définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^n$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array} \right.$

Théorème 3.

La loi $+$ sur $\mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes :

- **Commutativité** : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $x + y = y + x$.
- **Associativité** : $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- **Elément neutre** : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x + 0_{\mathbb{R}^n} = x$.
- **Symétrique** : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + y = y + x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration :

- Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

  $$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$$

  donc la loi $+$ est commutative sur $\mathbb{R}^n$.
- Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

  $$\begin{array}{rcl} (x + y) + z & = & (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) \\ & = & (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ & = & (x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\ & = & x + (y + z) \end{array}$$

  donc la loi $+$ est associative.
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

  $$x + 0_{\mathbb{R}^n} = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = x$$

  donc $0_{\mathbb{R}^n}$ est un élément neutre pour l'addition.

- Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Posons $y = (-x_1, \dots, -x_n)$.

$$x + y = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

donc tout élément admet un symétrique par la loi $+$. ■

Définition 4.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et λ un élément de $\mathbb{R}$.
On appelle multiplication de x par λ et on note $\lambda.x$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\lambda.x = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$$

On définit une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda.x \end{cases}$

Théorème 5.

La loi . sur $\mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes :
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $1.x = x$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

Démonstration :

- Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda.(x + y) &= \lambda.(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda.x_1 + \lambda.y_1, \dots, \lambda.x_n + \lambda.y_n) \\ &= (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n) + (\lambda.y_1, \dots, \lambda.y_n) \\ &= \lambda.x + \lambda.y \end{aligned}$$

- Idem
- Idem
- Idem

■

1.3 Stabilité par combinaison linéaire

Définition 6.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle combinaison linéaire de la famille F toute somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_p.e_p \text{ avec } \forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 $(1, 1, 1)$ est une combinaison **linéaire** de $(1, 0, 2)$ et de $(0, 1, -1)$.

En effet, $(1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (0, 1, -1)$.

Exemple 8 Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. $(\lambda, \mu, -\lambda + \mu) = \lambda.(1, 0, -1) + \mu.(0, 1, 1)$.

En effet, $(\lambda, \mu, -\lambda + \mu) = (\lambda, 0, -\lambda) + (0, \mu, \mu) = \lambda.(1, 0, -1) + \mu.(0, 1, 1)$.

Théorème 9 (Stabilité par combinaison linéaire)**.**

Toutes les combinaisons linéaires formées à partir de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On dit alors que $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaison linéaire.

Démonstration :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = \underbrace{\lambda_1.e_1 + \cdots + \underbrace{\underbrace{\lambda_{p-1}.e_{p-1}}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\lambda_p.e_p}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\in \mathbb{R}^n}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Finalement, $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in \mathbb{R}^n$. ■

Définition 10.

On dit que le triplet $(\mathbb{R}^n, +, .)$ a une structure d'espace vectoriel.

Remarque 11 On a déjà rencontré des ensembles possédant cette structure.

1.
2.
3.
4.

2 Structure de sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

2.1 Partie de $\mathbb{R}^n$ stable par combinaisons linéaires

Définition 12.

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$.
On dit que F est stable par combinaisons linéaires lorsque les combinaisons linéaires formées à partir de vecteurs de F sont des vecteurs de F.

Exemple 13 Soit la droite d'équation $2x + 3y = 0$. Montrer qu'elle est stable par combinaison linéaire.

Soit $(e_1 = (x_1, y_1), \dots, e_p = (x_p, y_p))$ des points de la droite. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.
Soit $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (x_k, y_k) = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k \right)$. Montrons que u appartient à la droite.

$$2\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k + 3\sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k = \sum_{k=1}^{p} (2\lambda_k x_k + 3\lambda_k y_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (2x_k + 3y_k) = 0$$

Donc, u appartient à la droite.
Donc, la droite est stable par combinaison linéaire.

2.2 Sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition 14.

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ signifie que

- $0_{\mathbb{R}^n} \in F$
- F est stable par combinaisons linéaires.

Exemple 15 Les droites passant par l'origine dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. Il y a équivalence entre :

1. F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. F est non vide et $\forall (x,y) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ ,\ \lambda x + \mu y \in F$.

Démonstration : On raisonne par double implication.

$1 \Rightarrow 2$: Par définition, F est stable par combinaisons linéaires donc, en particulier, F est stable par combinaisons linéaires de 2 vecteurs.
Par définition, $0_{\mathbb{R}^n} \in F$ donc F est non vide.

$2 \Rightarrow 1$: Supposons que F soit non vide et stable par combinaisons linéaires de deux vecteurs.
F est non vide : $\exists\, x \in F$. Donc, $x + (-1).x \in F$. Donc, $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.
Soit $(e_1,\dots,e_p) \in F^p$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = \underbrace{\lambda_1.e_1 + \cdots + \underbrace{\underbrace{\lambda_{p-1}.e_{p-1}}_{\in F} + \underbrace{\lambda_p.e_p}_{\in F}}_{\in F}}_{\in F}$$

Donc, F est stable par combinaisons linéaires, donc F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ■

Exemple 17 Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0\right\}$. Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On va appliquer le théorème 4.

- $0 + 2.0 + 3.0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$. Donc, F est non vide.
- On montrer la stabilité par combinaison linéaire de deux vecteurs.
  Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$. $\exists\, (x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^6$ tel que $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1.x + \lambda_2.y = (\lambda_1.x_1 + \lambda_2.y_1, \lambda_1.x_2 + \lambda_2.y_2, \lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_3)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1.x_1 + \lambda_2.y_1 + 2(\lambda_1.x_2 + \lambda_2.y_2) + 3(\lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_3) &= \lambda_1.x_1 + 2\lambda_1.x_2 + 3.\lambda_1.x_3 + \lambda_2.y_1 + 2\lambda_2.y_2 + 3\lambda_2.y_3 \\
&= \lambda_1 \underbrace{(x_1 + 2.x_2 + 3x_3)}_{=0 \text{ car } x \in F} + \lambda_2 \underbrace{(y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{=0 \text{ car } y \in F} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, $\lambda_1.x + \lambda_2.y \in F$.

Par le théorème 4, F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 18 Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\right\}$. Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $0 + 2.0 + 3.0 = 0$ et $0 - 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$. Donc, F est non vide.

- Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$. $\exists\, (x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^6$ tel que $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
  On a $\lambda_1.x+\lambda_2.y = (\lambda_1.x_1+\lambda_2.y_1, \lambda_1.x_2+\lambda_2.y_2, \lambda_1.x_3+\lambda_2.y_3)$.

$$\begin{aligned}\lambda_1.x_1+\lambda_2.y_1+2(\lambda_1.x_2+\lambda_2.y_2)+3(\lambda_1.x_3+\lambda_2.y_3) &= \lambda_1.x_1+2\lambda_1.x_2+3.\lambda_1.x_3+\lambda_2.y_1+2\lambda_2.y_2+3\lambda_2.y_3\\ &= \lambda_1\underbrace{(x_1+2.x_2+3x_3)}_{=0 \text{ car } x\in F}+\lambda_2\underbrace{(y_1+2y_2+3y_3)}_{=0 \text{ car } y\in F}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1.x_1+\lambda_2.y_1-(\lambda_1.x_2+\lambda_2.y_2)+(\lambda_1.x_3+\lambda_2.y_3) &= \lambda_1\underbrace{(x_1-x_2+x_3)}_{=0 \text{ car } x\in F}+\lambda_2\underbrace{(y_1-y_2+y_3)}_{=0 \text{ car } y\in F}\\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc, $\lambda_1.x+\lambda_2.y \in F$.
  Par le théorème 4, F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs

Définition 19.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$, et on note $\text{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, l'ensemble

$$\text{Vect}(e_1,\dots,e_p) = \left\{\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.e_i,\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ \alpha_i\in\mathbb{R}\right\}$$

C'est l'ensemble contenant toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Exemple 20 Déterminer $\text{Vect}\,((1,0,-1),(0,1,1))$.

$$\text{Vect}\,((1,0,-1),(0,1,1)) = \left\{\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,1),\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\} = \left\{(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_2,-\lambda_1+\lambda_2),\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Théorème 21.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$\text{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : Notons $F = \left\{\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.e_i,\ \forall i\in[\![1;p]\!],\ \alpha_i\in\mathbb{R}\right\}$. On va appliquer le théorème 4.

- $0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{p} 0.e_i$ donc $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.
- Soit $(x,y)\in F^2$. Donc, $\exists\,(\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta_1,\dots,\beta_p)\in\mathbb{R}^{2p}$ tel que $x=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{p}\beta_i.e_i$.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 x+\lambda_2 y = \lambda_1\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.e_i+\lambda_2.\sum_{i=1}^{p}\beta_i.e_i = \sum_{i=1}^{p}\underbrace{(\lambda_1.\alpha_i+\lambda_2.\beta_i)}_{\in\mathbb{R}}.e_i$$

  donc $\lambda_1 x+\lambda_2 y\in F$.
  Par le théorème 4, F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ■

Exemple 22 Montrer que $\left\{(x,y,-x)\ ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On va l'écrire sous forme de sous−espace vectoriel engendré par une famille.

$$\left\{(x,y,-x)\ ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x(1,0,-1)+y(0,1,0)\ ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Donc, $\left\{(x,y,-x)\ ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ =Vect$((1,0,-1),(0,1,0))$. Donc, c'est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème 23 (Intersection de deux sous−espaces vectoriels)**.**

Soient F et G deux sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Alors, $F\cap G$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : Soient Soient F et G deux sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

- $F\cap G\subset\mathbb{R}^n$.
- Par la définition 9, $0_{\mathbb{R}^n}\in F$ et $0_{\mathbb{R}^n}\in G$ donc $0_{\mathbb{R}^n}\in F\cap G$. Donc $F\cap G$ est non vide.
- Soit $(x,y)\in(F\cap G)^2$. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.
  $(x,y)\in F^2$ donc, par la d"finition 9, $\lambda_1x+\lambda_2y\in F$. De même, $\lambda_1x+\lambda_2y\in G$.
  Donc, $\lambda_1x+\lambda_2y\in F\cap G$.

Par le théorème 4, $F\cap G$ est un sous espace−vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ■

Exemple 24 L'intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

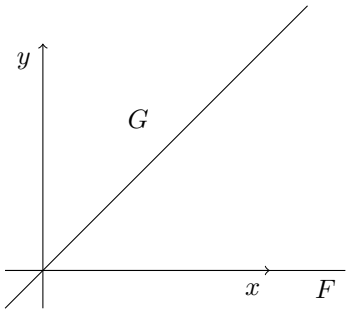
Théorème 25 (Intersection d'un nombre fini de sous−espaces vectoriels)**.**

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Soient $F_1,\dots F_p$ des sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Alors, $\bigcap_{k=1}^{p}F_k$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : C'est une généralisation du théorème 6.
On le démontre par récurrence. ■

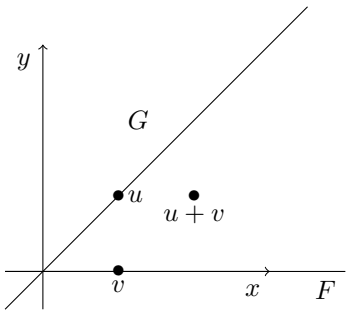
Remarque 26 En général, l'union de deux sous−espaces vectoriels n'est pas un sous−espace vectoriel.
Soient $F=\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(x,x)|x\in\mathbb{R}\}$.

1. Représenter (rapidement) $F\cup G$.



2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ mais que $F\cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement le résultat.
   $F=\{x(1,0)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$ =Vect$((1,0))$ donc c'est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
   $G=\{x(1,1)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$ =Vect$((1,1))$ donc c'est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   On va montrer que $F\cup G$ n'est pas stable par addition.
   Soit $u=(1,1)$. Soit $v=(1,0)$. On a bien $(u,v)\in F\cup G)^2$.



Or, $u+v=(2,1)\notin F\cup G$. Donc, $F\cup G$ n'est pas un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3 Familles de vecteurs dans un espace vectoriel

3.1 Familles génératrices d'un sous−espace vectoriel

Définition 27.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille finie de F.
On dit que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est génératrice de F lorsque $\text{Vect}(e_1,\dots,e_p)=F$.

Tout vecteur de F est une combinaison linéaire de la famille $(e_1,\dots,e_p)$.

$$\forall x\in F,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p \text{ tel que } x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k.e_k$$

Exemple 28 La famille $((1,0),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\Leftrightarrow x=x_1(1,0)+x_2(0,1)$ donc $\mathbb{R}^2=\text{Vect}((1,0),(0,1))$.

Exemple 29 La famille $((1,0),(1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\Leftrightarrow x=(x_1-x_2)(1,0)+x_2(1,1)$ donc $\mathbb{R}^2=\text{Vect}((1,0),(1,1))$.

Exemple 30 La famille $(e_1=(1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}),e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,e_n=(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 31 La famille $\mathcal{D}=((1,1,1),(0,1,1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

On va proposer un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'écrit pas comme combinaisons linéaire de $(1,1,1)$ et de $(0,1,1)$.
On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}^3=\text{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$.
$(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ donc $\exists\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(0,0,1)=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(0,1,1)\Rightarrow\begin{cases}0=\lambda_1\\0=\lambda_1+\lambda_2\\1=\lambda_1+\lambda_2\end{cases}$ Absurde
Donc, la famille $((1,1,1),(0,1,1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 32 Soit le système $\begin{cases}x+2y-4z=0\\x-y+t=0\end{cases}$.
Notons F l'ensemble des solutions de ce système. Déterminer une famille génératrice de F.

On va l'écrire sous forme de sous espace −vectoriel engendré par une famille.

$$\begin{cases}x+2y-4z=0\\x-y+t=0\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}x+2y-4z=0\\-3y+t+4z=0\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}x=2y+4z=\dfrac{-2t+4z}{3}\\y=\dfrac{-t-4z}{3}\end{cases}$$

Donc, $F = \left\{ \left(\dfrac{-2t+4z}{3}, \dfrac{-t-4z}{3}, z, t \right) \ , \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ t\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-1}{3}, 0, 1 \right) + z\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-4}{3}, 1, 0 \right) \ , \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Donc, $F = \text{Vect}\left(\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-1}{3}, 0, 1 \right), \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-4}{3}, 1, 0 \right) \right)$.
La famille $\left(\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-1}{3}, 0, 1 \right), \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-4}{3}, 1, 0 \right) \right)$ est génératrice de F.

3.2 Familles liées, familles libres

Remarque 33 Exprimer plus simplement $\text{Vect}((1,1,1),(-2,-2,-2))$ puis $\text{Vect}((1,1,1),(1,2,3),(0,-1,-2))$.

$\text{Vect}((1,1,1),(-2,-2,-2)) = \{\lambda_1.(1,1,1) + \lambda_2.(-2,-2,-2),\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{(\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2),\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda_1 - 2\lambda_2)(1,1,1),\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,1,1))$.

Définition 34.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille finie de F.

- On dit que la famille $(e_1 \ldots, e_p)$ est liée lorsque un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison liénaire des autres.
- On dit que la famille $(e_1 \ldots, e_p)$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée.

Exemple 35 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (2,3,5)$, $v = (3,4,0)$ et $w = (5,7,5)$.
Montrer que la famille (u,v,w) est liée.

On remarque que $w = u + v$ donc la famille est liée.

Théorème 36 (Caractérisation d'une famille liée)**.**

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille finie de F.
On a équivalence entre

1. La famille $(e_1 \ldots, e_p)$ est liée.
2. $\exists\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k = 0_E$.

Démonstration : On raisonne par double implication.

$1 \Rightarrow 2$: On suppose que la famille est liée.
Donc, $\exists\ i_0 \in [\![1;p]\!],\ \exists\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i_0-1}, \lambda_{i_0+1}, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $e_{i_0} = \displaystyle\sum_{k \neq i_0} \lambda_k.e_k$.
Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i_0-1} \lambda_k.e_k - e_{i_0} + \sum_{k=i_0+1}^{p} \lambda_k.e_k = 0$.
La proposition 2 est vraie avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i_0-1}, -1, \lambda_{i_0+1}, \ldots, \lambda_p)$.

$2 \Rightarrow 1$: On suppose qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k = 0$.
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0) \Rightarrow \exists\ i_0 \in [\![1;p]\!],\ \lambda_{i_0} \neq 0$.
Donc, $\lambda_{i_0} e_{i_0} = -\displaystyle\sum_{k \neq i_0} \lambda_k.e_k$. Donc, $e_{i_0} = \displaystyle\sum_{k \neq i_0} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{i_0}}.e_k$.
Donc, la famille est liée. ■

Remarque 37 Pour montrer qu'une famille est liée, on doit déterminer les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.
On raisonnera souvent par analyse et synthèse.

Théorème 38 (Caractérisation d'une famille libre).

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille finie de F.
On a équivalence entre

1. La famille $(e_1 \dots, e_p)$ est libre.
2. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1; p]\!],\ \lambda_k = 0.$

Démonstration : C'est la négation du théorème précédent. ■

Exemple 39 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (2, 3, 1)$.
Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

On va appliquer la caractérisation de la liberté (théorème 10).
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1.u + \lambda_2.v + \lambda_3.w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -7\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 18\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La famille (u, v, w) est donc libre.

Exemple 40 Soient $u = (0, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 3)$. Montrer que (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

3.3 Bases d'un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Définition 41.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille finie de F.
On dit que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F lorsque elle est libre et génératrice de F.

Exemple 42 La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est *la base canonique* de $\mathbb{R}^2$.

On a déjà montré qu'elle était génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0)$.
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc la famille est libre. C'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 43 La famille $((1, 0), (1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a déjà montré qu'elle était génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(1, 1) = (0, 0)$.
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc la famille est libre. C'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 44 (Existence de bases, ADMIS).

Tous les sous−espaces vectoriels non vides de $\mathbb{R}^n$ admettent des bases.

Exemple 45 Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

On va l'écrire comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille.
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = -y-z-t\} = \{(-y-z-t, y, z, t),\ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}$.
Donc, F =Vect$((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$.
C'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille $((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$ est une famille génératrice de F.

Montrons qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(-1,1,0,0)+\lambda_2(-1,0,1,0)+\lambda_3(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille est libre. C'est une base de F.

Théorème 46.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F.

$$\forall x \in F,\ \exists\,!\,(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k$$

Démonstration : Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Soit $x \in E$.

- Existence : La famille $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E. En particulier, elle est génératrice de E.
  Donc, $\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k$.
- Unicité : Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p,\beta_1,\dots,\beta_p) \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k = \sum_{k=1}^{p} \beta_k.e_k$.
  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \beta_k).e_k = 0_E$. Or, la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est libre.
  Donc, $\forall k \in [\![1;p]\!],\ \lambda_k - \beta_k = 0$.
  Donc, $\forall k \in [\![1;p]\!],\ \lambda_k = \beta_k$.
  Il y a bien unicité de l'écriture. ■

Remarque 47 génératrice → existence et libre → unicité.

Définition 48.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de F.
On appelle coordonnées de $x \in F$ dans la base $(e_1,\dots,e_p)$ les **uniques** coefficients $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ tels que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.e_k$.
On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Remarque 49 Cela étend la définition de coordonnées rencontrée pour les vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 50 Soit $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Au lieu d'écrire "soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$", on devrait écrire "soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont (x, y, z)".

Exemple 51 Soit $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées dans cette base d'un vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille est libre.

On va raisonner par analyse-synthèse pour montrer qu'elle est génératrice. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

A : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (a, b, c)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_1 + \lambda_3 = c \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - b \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c - a + b \end{cases}$$

S : On va vérifier que ça convient bien.

$$(a - b)(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + (c - a + b)(0, 0, 1) = (a - b + b, b, a - b + c - a + b) = (a, b, c)$$

La famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Les coordonnées de $x = (a, b, c)$ dans cette base sont $(a - b, b, c - a + b)$.

4 Espaces vectoriels (HP en première année)

Définition 52.

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}-$ev, un triplet $(E,+,\times)$ où

1. E est un ensemble,
2. La loi $+ : E \times E \mapsto E$ est une loi de composition interne telle que :
   (a) $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y = y+x$.
   (b) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
   (c) $\exists\, 0_E \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x + 0_E = x$.
   (d) $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ tel que $x+y = y+x = 0_E$.
3. La loi $. : \mathbb{K} \times E \mapsto E$ est une loi de composition externe telle que :
   (a) $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
   (b) $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
   (c) $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}}.x = x$.
   (d) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda \times \mu).x = \lambda.(\mu.x)$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Exemple 53

1. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel.
   L'addition et la multiplication externe sont celles définies dans le chapitre "Complexes".
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
   L'addition et la multiplication externe sont celles définies dans le chapitre "Matrices".
   L'élément neutre est la matrice nulle.
3. L'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
   L'élément neutre est la fonction constante égale à 0.
4. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
5. $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

Définition 54.

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $F \subset E$. F est un sous$-$espace vectoriel de E signifie que

- $0_{\mathbb{R}^n} \in F$
- F est stable par combinaisons linéaires **(de deux ou de p vecteurs de F)**.

Exemple 55 Etudier les ensembles suivants.

1. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/ M \text{ soit diagonale}\}$.
   - La matrice nulle est diagonale donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in F$.
   - Soit $(D_1, D_2) \in F^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2.D_2 = \lambda_1.\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} + \lambda_2.\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \lambda_1.\begin{pmatrix} \lambda_1.a_1 + \lambda_2.b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1.a_n + \lambda_2.b_n \end{pmatrix}$$

   La matrice $\lambda_1 D_1 + \lambda_2.D_2$ est encore diagonale donc $\lambda_1 D_1 + \lambda_2.D_2 \in F$.

   Donc, l'ensemble des matrices diagonales est un sous$-$espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $F = \{y \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, ay'' + by' + cy = 0\}$.

- La fonction identiquement nulle est solution de cette EDL donc $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$.
- Soit $(y_1, y_2) \in F^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} a(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2)'' + b(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2)' + c(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2) &= \lambda_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0 \text{ car } y_1 \in F} + \lambda_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  La fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2.y_2$ est solution de l'EDL donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2.y_2 \in F$.

Donc, l'ensemble des solutions est un sous−espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. $F = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$. On va montrer que c'est un sous espace−vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$.
   - Le polynôme nul est de degré $-\infty$ donc $0_{\mathbb{R}[\mathbf{X}]} \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.
   - Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\deg(\lambda_1 P + \lambda_2 Q) \leq \max(\deg(\lambda_1 P), \deg(\lambda_2 Q)) \leq n$$

     Donc, $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in \mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$.

   Donc, $\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]$ est un sous espace−vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

4. $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$. On va montrer que c'est un sous espace−vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$.
   - La suite constante égale à 0 vérifie la relation donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.
   - Soit $(u, v) \in F^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda_1.u + \lambda_2 v)_{n+2} &= \lambda_1.u_{n+2} + \lambda_2.v_{n+2} \\ &= \lambda_1(2u_{n+1} + 3u_n) + \lambda_2(2v_{n+1} + 3v_n) \\ &= 2(\lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 v_{n+1}) + 3(\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n) \\ &= 2(\lambda_1.u + \lambda_2 v)_{n+1} + 3(\lambda_1.u + \lambda_2 v)_n \end{aligned}$$

     Donc, $\lambda_1 u + \lambda_2 v \in F$.

   Donc, F est un sous espace−vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 56 Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.