

Chapitre 27 : Sous–espaces vectoriels de dimension finie

Table des matières

1	Sous–espaces vectoriels de dimension finie	2
1.1	Définition et premiers exemples	2
1.2	Familles de vecteurs en dimension finie	2
2	Dimension d’un sous–espace vectoriel de dimension finie	3
2.1	Définition et premiers exemples	3
2.2	Dimension et familles de vecteurs	3
2.3	Recherche de bases	4
2.4	Comparaison des dimensions	4
3	Rang d’une famille finie de vecteurs	5
3.1	Matrice d’une famille de vecteurs	5
3.2	Rang d’une famille de vecteurs	5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé dans tout le chapitre.

1 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est de dimension finie lorsque F possède une famille génératrice finie, c'est-à-dire :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (e_1, \dots, e_p) \in F^p \text{ tel que } F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

Sinon, il est dit de dimension infinie.

Exemple 2 L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension finie.

Théorème 3.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ est de dimension infinie.

1.2 Familles de vecteurs en dimension finie

Théorème 4.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F .

Si $e_p \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ alors la famille $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est aussi une famille génératrice de F .

Remarque 5 Le cardinal des familles génératrices n'est pas fixe.

Théorème 6.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de F .

Si $e_{p+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est aussi une famille libre de F .

Remarque 7 Le cardinal des familles libres n'est pas fixe.

Théorème 8.

Toutes les bases d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie ont le même cardinal.

2 Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

2.1 Définition et premiers exemples

Définition 9.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie. On appelle dimension de F le cardinal commun à toutes les bases de F .

On note cet entier $\dim(F)$.

Convention Lorsque F est de dimension infinie, on pose $\dim(F) = +\infty$.
Lorsque $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on pose $\dim(F) = 0$.

Méthode Pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

1. On prouve qu'il est de dimension finie en exhibant une famille génératrice
2. On détermine une base de F , à partir de cette famille génératrice, et on regarde son cardinal.

Exemple 10

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{R}_n[\mathbf{X}]) = n + 1$.
- $\dim(\mathbb{R}[\mathbf{X}]) = +\infty$.

2.2 Dimension et familles de vecteurs

Théorème 11.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie p .

1. Toutes les familles libres ont au plus p vecteurs.
2. Les familles de cardinal supérieur ou égal à $p + 1$ sont des familles liées.
3. (Les bases de F ont exactement p vecteurs.)
4. Les familles génératrices de F ont au moins p vecteurs.
5. Les familles dont le cardinal est strictement inférieur à p ne sont pas des familles génératrices de F .

Exemple 12 La famille $\mathcal{F} = ((1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exemple 13 La famille $\mathcal{F} = ((1, 4, 0), (-\sqrt{5}, 1, 1), (0, -2, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}))$ est-elle libre ?

Théorème 14.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie p .

1. Une famille libre ayant exactement p vecteurs est une base de E .
2. Une famille génératrice de E ayant exactement p vecteurs est une base de E .

Exemple 15 Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 16 Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que deux vecteurs orthogonaux forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 17 Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que trois vecteurs deux à deux orthogonaux forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2.3 Recherche de bases

Théorème 18 (Théorème de la base extraite).

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie p .
De toute famille génératrice de F on peut extraire une base de F .

Exemple 19 Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1), (-1, 0, 1, 1))$.
Déterminer une base et la dimension de F .

Théorème 20 (Théorème de la base incomplète).

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie p .
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de F .
On peut la compléter pour obtenir une base de F .
En particulier, on peut le faire à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 21 Soit $(u_1 = (3, 2, -4), u_2 = (2, 1, -2))$ une famille de $\mathbb{R}^3$.

1. Est-elle libre ?
2. Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
3. Complétez-la pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Comparaison des dimensions

Théorème 22.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie.
Alors, $\dim(F) \leq n$.

Exemple 23 On travaille dans $E = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{K}_n[\mathbf{X}] / P(0) = 0\}$.

1. Rappeler pourquoi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$ de dimension finie.
2. Déterminer sa dimension.

Théorème 24.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Remarque 25 Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux, on peut montrer que

- $F \subset G$ et $G \subset F$
ou
- $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Exemple 26 Soient $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et $G = ((1, 2, 1), (1, 0, -1))$. Montrer que $F = G$.

Définition 27.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie.

1. On dit que F est une droite vectorielle lorsque $\dim(F)=1$
2. On dit que F est un plan vectoriel lorsque $\dim(F)=2$

3 Rang d'une famille finie de vecteurs

3.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 28.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie p et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

Soit $(u_1, \dots, u_q) \in F$. $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\exists ! (x_{1i}, \dots, x_{pi}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u_i = \sum_{k=1}^p x_{ik} e_k$.

On appelle matrice de la famille $(u_1, \dots, u_q)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_q) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ x_{21} & \dots & \dots & x_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pq} \end{pmatrix}$$

Exemple 29 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soient $u = (1, 2, 0, -2)$, $v = (1, 6, 1, -3)$, $w = (-4, 0, 0, 1)$. Écrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$.

Exemple 30 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de F . Écrire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$.

3.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 31.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_q)$ une famille de vecteurs de F .

On appelle rang de la famille $(u_1, \dots, u_q)$ la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_q)$.

On la note $\text{rg}(u_1, \dots, u_q)$ ou $\text{rg}(\mathcal{F})$.

Exemple 32 Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$
2. $\mathcal{G} = ((1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 1))$

Remarque 33 Pour déterminer $\text{rg}(u_1, \dots, u_q)$, on doit extraire une famille libre de la famille $(u_1, \dots, u_q)$.

Exemple 34

- $\text{rg}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0_E \\ 0 & \text{si } u = 0_E \end{cases}$
- $\text{rg}(u, v) = \begin{cases} 2 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont linéairement indépendants} \\ 1 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont linéairement dépendants et non tous les deux nuls} \\ 0 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont tous les deux nuls} \end{cases}$

Théorème 35.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Le rang de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est égal au rang de la matrice de $(e_1, \dots, e_p)$ dans une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 36 On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on pose

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 2, 1, 0), \quad e_2 = (-1, 1, 1, 0), \quad e_3 = (1, 5, 3, 0) \\ e_4 &= (3, 3, 1, 0), \quad e_5 = (0, 1, 0, 1), \quad e_6 = (-1, 3, 3, -1) \end{aligned}$$

1. Sans aucun calcul, justifier que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ n'est pas libre.
2. Calculer le rang de cette famille.
3. On note $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. Déterminer une base de F .
4. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Théorème 37.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si, et seulement si, le rang de $(e_1, \dots, e_p)$ est égal à p .