Exercice 1 Pour chacun des ensembles F proposés, déterminer une base et la dimension.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2y + z - t = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2y = 3z\}$
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[\mathbf{X}] \ / \ P(1) = 0\}$
4. $F = \mathrm{Vect}((\mathbf{X} - 1)^2, \mathbf{X}^2, (\mathbf{X} + 1)^2)$.

Correction

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2y + z - t = 0\} = \{(x, y, z, 2y + z), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ donc $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 1))$.
   Cette famille est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 2) + \lambda_3(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$.
   $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
   C'est une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 3$.
2. $E = \mathrm{Vect}((6, 3, 2))$. Cette famille est libre donc c'est une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 1$.
3. Soit $P = a\mathbf{X}^3 + b\mathbf{X}^2 + c\mathbf{X} + d$.
   $$\begin{aligned} P \in F \Leftrightarrow a + b + c + d = 0 &\Leftrightarrow P = a\mathbf{X}^3 + b\mathbf{X}^2 + c\mathbf{X} - a - b - c \\ &\Leftrightarrow P = a(\mathbf{X}^3 - 1) + b(\mathbf{X}^2 - 1) + c(\mathbf{X} - 1) \end{aligned}$$
   donc $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{X} - 1, \mathbf{X}^2 - 1, \mathbf{X}^3 - 1)$.
   On a déterminé une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(\mathbf{X} - 1) + \lambda_2(\mathbf{X}^2 - 1) + \lambda_3(\mathbf{X}^3 - 1) = 0$.
   Par identification des coefficients, $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_3 - \lambda_2 = 0 - \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$
   Cette famille est libre. C'est une base de F donc $\dim(E) = 3$.
4. La famille $((\mathbf{X} - 1)^2, \mathbf{X}^2, (\mathbf{X} + 1)^2)$ est génératrice de F.
   De plus, cette famille est libre donc c'est une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 3$.

Exercice 2 On considère l'ensemble $E = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0\Big\}$.

1. Montrer que E est un sous−espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Correction

1. L'équation caractéristique associée est $\mathbf{X}^2 + 4\mathbf{X} + 4 = 0$ et -2 est solution double.
   Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \exists \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = (A + nB)(-2)^n = A(-2)^n + Bn(-2)^n$.
   Donc,
   $$E = \mathrm{Vect}\left(((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n(-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
   C'est un sous−espace vectoriel de l'ensemble des suites et il admet une famille génératrice donc il est de dimension finie.
2. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \lambda_1(-2)^n + \lambda_2 n(-2)^n = 0$.
   $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1(-2) + \lambda_2.(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$
   La famille est libre. C'est donc une base de E et $\dim(E) = 2$.

Exercice 3 Soient F et G les deux ensembles suivants

$$\begin{array}{rcl} F & = & \Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+y+t=0 \text{ et } 2x+y+z=0\Big\} \\ G & = & \mathrm{Vect}((-2,1,3,1),(0,1,-1,-1)) \end{array}$$

1. Montrer que F est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.
2. Montrer que $G\subset F$.
3. Montrer que $G=F$.

Correction

1. On commence par résoudre le système qui définit E. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+t=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+t=0 \\ -y+z-2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y-t \\ z=y+2t \end{array}\right.$$

   Donc, $E=\{y(-1,1,1,0)+t(-1,0,2,1),\ (y,t)\in\mathbb{R}^2\}$ donc $E=$Vect$((-1,1,1,0),(-1,0,2,1))$.
   C'est un sous–espace vectoriel de dimension finie et on connait une famille génératrice. Montrons qu'elle est libre.
   Les deux vecteurs sont non nuls et non colinéaires donc ils forment une famille libre.
   On a donc une base de F et $\dim(F)=2$.
2. On va montrer que les deux vecteurs qui engendrent G appartiennent à F.
   - $-2+1+1=0$ et $-4+1+3=0$ donc $(-2,1,3,1)\in F$.
   - $0+1-1=0$ et $0+1-1=0$ donc $(0,1,-1,-1)\in F$.

   Or, F est stable par combinaison linéaire donc $\mathrm{Vect}((-2,1,3,1),(0,1,-1,-1))\subset F$.
   Donc, $\boxed{G\subset F}$.
3. Déterminons la dimension de G.
   La famille génératrice de G est libre puisque les vecteurs non colinéaires donc c'est une abse de G. Donc, $\dim(G)=2)$.
   Ainsi, $G\subset F$ et $\dim(F)=$dim(G) don,c $\boxed{F=G}$.

Exercice 4 Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $e_1=(1,1,0,1)$, $e_2=(1,-1,1,0)$, $e_3=(2,0,1,1)$, $e_4=(0,-2,1,-1)$
2. $e_1=(-1,2,2)$, $e_2=(4,-2,-1)$, $e_3=(3,-1,1)$, $e_4=(-7,3,0)$
3. $P_1=\mathbf{X}-1$, $P_2=2\mathbf{X}$, $P_3=\mathbf{X}^2-3\mathbf{X}$ et $P_4=3\mathbf{X}^3+\mathbf{X}^2-2$

Correction

1. On va fabriquer la plus grande famille libre possible à partir de ces 4 vecteurs.
   (a) La famille (e_1,e_2) est libre.
   (b) $e_3=e_1+e_2$ et $e_4=e_2-e_1$ donc $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)=$Vect$(e_1,e_2)$.

   Donc, $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4)=2$.
2. Cette famille contient 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 donc elle n'est pas libre donc $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4)\leq 3$. On va fabriquer la plus grande famille libre possible à partir de ces 4 vecteurs.
   (a) La famille (e_1,e_2) est libre donc $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4)\geq 2$.
   (b) $e_3=5e_1+2e_2$ donc $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)=$Vect$(e_1,e_2)$.
   $e_4\notin\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ donc la famille (e_1,e_2,e_4) est libre et $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)=$Vect$(e_1,e_2,e_4)$.

   Donc, $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4)=3$.

3. La famille (P_2, P_3, P_4) est de degré échelonné donc libre.
   $P_1 \notin \text{Vect}(P_2, P_3, P_4)$ donc (P_1, P_2, P_3, P_4) est libre. Donc $\text{rg}(P_1, P_2, P_3, P_4) = 4$. C'est une base de $\mathbb{R}_3[\mathbf{X}]$.

Exercice 5 On considère dans $\mathbb{C}^3$ les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. La famille (u, v) est-elle une base de $\mathbb{C}^3$?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v)$ de $\mathbb{C}^3$?
3. Le vecteur $(1, 4, 7)$ appartient-il à F ? si oui, déterminer ses coordonnées dans la base (u, v).
4. Le vecteur $(-1, 6, 9)$ appartient-il à F ? si oui, déterminer ses coordonnées dans la base (u, v).

Correction

1. $\mathbb{C}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 donc les bases sont formées de 3 vecteurs. Donc, (u, v) n'est pas une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre.
   Ainsi, (u, v) est une base de F donc $\dim(F) = 2$.
3. On va raisonner par analyse-synthèse.
   A : Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(1, 4, 7) = \lambda_1.u + \lambda_2.v$.
   $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ -4\lambda_2 = 2 \\ -8\lambda_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 - 3\lambda_2 = \dfrac{5}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$
   S : $\frac{5}{2}u + \frac{-1}{2}v = (1, 4, 7)$ donc $(1, 4, 7) \in F$.
   Ses coordonnées dans la base (u, v) sont $\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.
4. On va raisonner par analyse-synthèse.
   A : Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(-1, 6, 9) = \lambda_1.u + \lambda_2.v$.
   $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 6 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ -4\lambda_2 = 8 \\ -8\lambda_2 = 12 \end{cases}$$. Ce système n'a pas de solution
   Donc, par l'absurde, on a montré que $(-1, 6, 9) \notin F$.