Corrigé du devoir surveillé n° 7

— 27 avril 2024—

Exercice 1. Informatique

1.
```python
def appartient(x,L):
    for a in L:
        if a==x:
            return True
    return False
```

2.
```python
def maximum(L):
    m = L[0]
    for a in L:
        if a>m:
            m = a
    return m
```

Exercice 2. Étude de la continuité

1. La fonction f est définie sur $\boxed{D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[}$.

2. La fonction f est continue sur D_f comme quotient de fonctions continues sur D_f avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

3. On va utiliser les développements limités.
$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) - x \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
Donc, $f(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{2} + o(1)$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Donc, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.
La fonction prolongée est $\boxed{\tilde{f} : \begin{array}{ccc}]-1,0[\cup]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \text{ si } x \in D_f \\ -\dfrac{1}{2} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}}$

Exercice 3 - Probabilités.

1. Initialement, on met 0, 1 ou 2 boules dans l'urne U de façon équiprobable.
Donc $\boxed{P(A_0) = 1/3,\ P(B_0) = 1/3,\ P(C_0) = 1/3}$
Pour trouver $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$, nous allons appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet : (A_0, B_0, C_0), en remarquant que $P(A_0) \neq 0$, $P(B_0) \neq 0$ et $P(C_0) \neq 0$. Ainsi :
• $P(A_1) = P(A_0)P_{A_0}(A_1) + P(B_0)P_{B_0}(A_1) + P(C_0)P_{C_0}(A_1)$. Or on a calculé précédemment $P(A_0) = P(B_0) = P(C_0) = 1/3$, et d'après l'énoncé, $P_{A_0}(A_1) = 0$ (car si l'urne U est vide, à l'étape suivante elle va forcément recevoir une boule), $P_{B_0}(A_1) = 1/2$ (car si l'urne U contient une boule, la probabilité qu'elle soit vide à l'étape suivante est la probabilité de choisir 1, qui vaut 1/2), et $P_{C_0}(A_1) = 0$ (car si l'urne U contient 2 boules, elle ne peut pas être vide à l'étape suivante).
Ainsi, $P(A_1) = 0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{6}$.
• De même, $P(B_1) = \underbrace{P(A_0)}_{1/3}\underbrace{P_{A_0}(B_1)}_{1} + \underbrace{P(B_0)}_{1/3}\underbrace{P_{B_0}(B_1)}_{0} + \underbrace{P(C_0)}_{1/3}\underbrace{P_{C_0}(B_1)}_{1}$. Donc $P(B_1) = 2/3$.
• Enfin, $P(C_1) = \underbrace{P(A_0)}_{1/3}\underbrace{P_{A_0}(C_1)}_{0} + \underbrace{P(B_0)}_{1/3}\underbrace{P_{B_0}(C_1)}_{1/2} + \underbrace{P(C_0)}_{1/3}\underbrace{P_{C_0}(C_1)}_{0}$. Donc $P(C_1) = 1/6$.
En résumé : $\boxed{P(A_1) = 1/6,\ P(B_1) = 2/3,\ P(C_1) = 1/6}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet (A_n, B_n, C_n), en remarquant que $P(A_n) \neq 0$, $P(B_n) \neq 0$ et $P(C_n) \neq 0$ (il est possible que l'urne U contiennent 0, 1 ou 2 boules à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ étape) :
$P(A_{n+1}) = P(A_n)\underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{0(*)} + P(B_n)\underbrace{P_{B_n}(A_{n+1})}_{1/2(**)} + P(C_n)\underbrace{P_{C_n}(A_{n+1})}_{0(***)}$.

(*) car si l'urne U est vide, elle reçoit forcément une boule à l'étape suivante.
(**) car si l'urne U contient exactement une boule, elle en perd une si (et seulement si) on choisit l'entier 2 (probabilité 1/2).
(***) car si l'urne U contient exactement 2 boules, elle ne peut pas être vide à l'étape suivante.

Ainsi, $\boxed{P(A_{n+1}) = 0.P(A_n) + 1/2.P(B_n) + 0.P(C_n)}$.

De même, $P(B_{n+1}) = P(A_n)\underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{1(*)} + P(B_n)\underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{0(**)} + P(C_n)\underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{1(***)}$

(*) car si l'urne U est vide, elle contient forcément 1 boule à l'étape suivante.
(**) car il y a nécessairement un changement
(***) car si l'urne U contient 2 boules, on lui en retire forcément une à l'étape suivante.

Donc $\boxed{P(B_{n+1}) = 1.P(A_n) + 0.P(B_n) + 1.P(C_n)}$.

Et de même : $P(C_{n+1}) = P(A_n)\underbrace{P_{A_n}(C_{n+1})}_{0} + P(B_n)\underbrace{P_{B_n}(C_{n+1})}_{1/2} + P(C_n)\underbrace{P_{C_n}(C_{n+1})}_{0}$

Donc $\boxed{P(C_{n+1}) = 0.P(A_n) + 1/2.P(B_n) + 0.P(C_n)}$.

Les trois résultats encadrés s'expriment matriciellement : $\boxed{Y_{n+1} = AY_n}$ où A est la matrce de l'énoncé.

3. On montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^n Y_0}$

4. On vérifie que

$$P\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} P = I_3$$

$$\boxed{\text{Donc } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. On trouve $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}$ (car D est diagonale).

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : A^n = PD^nP^{-1}.$$

• **Initialisation** : $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A$ (d'après $\mathcal{P}_n$). Or $D = P^{-1}AP$ donc, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, $A = PDP^{-1}$. D'où :
$A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}$ (par associativité du produit matriciel).
Ainsi, $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• **Conclusion** : Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

7. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. On a montré que $Y_n = A^nY_0$. Donc $Y_n = PD^nP^{-1}Y_0$. Ainsi, pour calculer les coefficients de la matrice colonne Y_n (qui sont $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$), nous allons calculer : $P^{-1}Y_0$, puis $D^n(P^{-1}Y_0)$, puis $P(D^nP^{-1}Y_0)$ (on obtient à chaque fois une matrice colonne). On obtient :

$$Y_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{3} \\ 2 - 2.\frac{(-1)^n}{3} \\ 1 + \frac{(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_n) = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{12},\ P(B_n) = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{6},\ P(C_n) = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{12}}$.

8. La probabilité que l'urne U soit vide à l'issue de 10 tirages est $P(A_{10})$. D'après la question précédente, elle vaut $\boxed{P(A_{10}) = 1/3}$. De même, $\boxed{P(A_{11}) = 1/6}$. La probabilité que les deux urnes contiennent une boule chacune à l'issue de 10 tirages est $P(B_{10})$, elle vaut $\boxed{P(B_{10}) = 1/3}$, et de même $\boxed{P(B_{11}) = 2/3}$.

Exercice 4 - Étude de la réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives. Donc $x \mapsto e^x - e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$; et $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives (somme de deux termes strictement positifs). Ainsi, th est le quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas.
   $\boxed{\text{Donc th est définie sur } \mathbb{R}.}$

2. De même, puisque $x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, th est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas. Donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$. $\boxed{\text{Ainsi, th est dérivable sur } \mathbb{R}\text{, de dérivée } x \mapsto 1 - \mathrm{th}^2(x).}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Puisque $e^{-x} > 0$, on a : $-e^{-x} < 0 < e^{-x}$, donc en particulier, $-e^{-x} < e^{-x}$. Donc, en ajoutant e^x : $e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$. De même, $-e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x}$. Ainsi, $-(e^x + e^{-x}) < e^e - e^{-x} < e^x + e^{-x}$. En divisant cette inégalité par $e^x + e^{-x}$ qui est strictement positif, on obtient : $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$. Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \mathrm{th}(x) < 1.}$

4. D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{th}(x)| < 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}^2(x) < 1$, ou encore $1 - \mathrm{th}^2(x) > 0$. Ainsi, la dérivée de th est strictement positive sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{On en déduit que th est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}.}$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x}{2}(1+e^{-2x})$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-2x} = 1$ donc $\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.}$. De la même manière que $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.}$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x}+1)$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}+1 = 1$ donc $\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2}.}$. De la même manière que

   $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{2}.}$

   Par quotient des équivalents, on en déduit : $\mathrm{th}(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $\mathrm{th}(x) \underset{-\infty}{\sim} -1$.

   On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1.}$.

6. On remarque, en factorisant numérateur et dénominateur par e^x, que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{1-e-2x}{1+e^{-2x}}$. Or $1 - e^{-2x} \underset{0}{\sim} 2x$ et $\lim_{x\to 0} 1 + e^{-2x} = 2 \neq 0$ donc $1 + e^{-2x} \underset{0}{\sim} 2$. Ainsi, par quotient des équivalents, $\boxed{\mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x.}$

   Par ailleurs, le calcul en $x = 0$ donne $\boxed{\mathrm{th}(0) = 0.}$

7. On déduit des questions précédentes le tableau de variations de th :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$+$	
$\mathrm{th}(x)$	-1	$\nearrow$	1

8. Nous avons montré que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue (nous avons justifié la dérivabilité). Donc $\boxed{\text{elle établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur son image : } \mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[}$ (d'après le tableau de variations).

9. Le tableau de variations de Argth se déduit de celui de la fonction th.

x	-1		1
$\mathrm{Argth}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

10. Soit $y_0 \in]-1,1[$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = y_0 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y_0 \\
&\iff e^x - e^{-x} = y_0(e^x + e^{-x}) \quad (\text{ on a multiplié par } e^x + e^{-x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}) \\
&\iff (1-y_0)e^x = (1+y_0)e^{-x} \\
&\iff (1-y_0)e^{2x} = (1+y_0) \qquad (\text{on a multiplié par } e^x > 0 \text{ sur } \mathbb{R}) \\
&\iff e^{2x} = \frac{1+y_0}{1-y_0} \qquad (\text{on a divisé par } 1-y_0 > 0 \text{ car } y_0 \in]-1,1[) \\
&\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}\right) \qquad \left(\frac{1+y_0}{1-y_0} > 0 \text{ car } y_0 \in]-1,1[\text{ donc on peut composer par } \ln\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}\right)
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{l'équation } \operatorname{th}(x) = y_0 \text{ possède une unique solution qui vaut } \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}\right).}$

11. Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, $\operatorname{th}(x) = y \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. On en déduit que la fonction $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{array}$ est la bijection réciproque de la fonction th. Ainsi, la fonction Argth est la fonction :

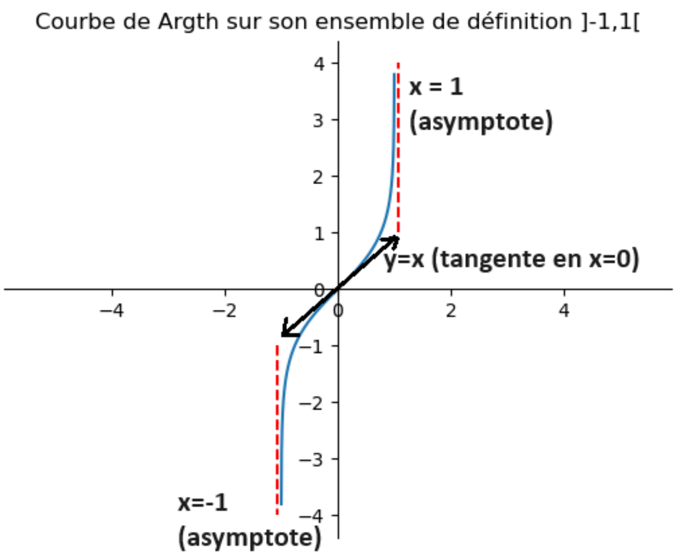
$$\boxed{\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{array}}$$

12. D'après la question précédente, Argth est la composée de la fonction $y \mapsto \frac{1+y}{1-y}$, dérivable sur $]-1,1[$ (comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de $z \mapsto \frac{1}{2}\ln z$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc Argth est dérivable sur $]-1,1[$, et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{2}\frac{(1-y)+(1+y)}{(1-y)^2}\frac{1-y}{1+y} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction Argth est dérivable sur }]-1,1[\text{, de dérivée } y \mapsto \frac{1}{1-y^2}.}$

13. $\operatorname{Argth}(0) = 0$ et $\operatorname{Argth}'(0) = 1$ donc la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
On en déduit l'allure de la courbe représentative de Argth :



Exercice 5 - Variables aléatoires

1. Au premier tirage, il y a n boules dans l'urne, numérotées de 1 à n. Puisque le tirage se fait au hasard, on en déduit : $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket).}$ D'où (formules du cours) $\boxed{E(X_1) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X_1) = \frac{n^2-1}{12}.}$

2.
   - L'univers image de X_2 est : $X_2(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$.
   - Soit $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$ fixé. Utilisons la formule des probabilités totales, avec le système complet $(X_1 = j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, pour calculer $P(X_2 = k)$:

$$P(X_2 = k) = \sum_{j=1}^{n} P(X_2 = k \cap X_1 = j).$$

   D'où, puisque les $P(X_1 = j)$ sont tous non nuls :

$$P(X_2 = k) = \sum_{j=1}^{n} P(X_2 = k \mid X_1 = j)P(X_1 = j).$$

   Or $\forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $P(X_1 = j) = \frac{1}{n}$ et $P(X_2 = k \mid X_1 = j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j = k \\ \frac{1}{n-1} \text{ si } j \neq k. \end{cases}$

   Ainsi, $P(X_2 = k) = \underbrace{P(X_2 = k \mid X_1 = k)}_{=0} P(X_1 = k) + \sum_{j \neq k} \frac{1}{n-1}\frac{1}{n} = (n-1)\frac{1}{n-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. D'où $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket).}$

3. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $X_j(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$. Soit $(k,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ fixé quelconque. Si on a tiré la boule numéro k au i^{eme} tirage, alors il reste $n-1$ boules dans l'urne : toutes sauf celle numéro k. Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } l \neq k,\ P(X_{i+1} = l \mid X_i = k) = \dfrac{1}{n-1}, \\ \bullet \text{ Si } l = k,\ P(X_{i+1} = k \mid X_i = k) = 0. \end{array}}$$

   (b) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence $\mathcal{Q}_i$: «X_i suit la loi uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$».
   - $\mathcal{Q}_1$ est vraie (prouvé à la question 1.)
   - Soit $i \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_i$ soit vraie.
     Soit $k \in X_{i+1}(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$ fixé quelconque. Calculons $P(X_{i+1} = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_i = j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, dont les évènements sont de probabilités non nulles :

$$P(X_{i+1} = k) = \sum_{j=1}^{n} P(X_{i+1} = k \mid X_i = j)P(X_i = j).$$

     Or pour tout $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $P(X_i = j) = \frac{1}{n}$, d'après $\mathcal{Q}_i$. De plus, $P(X_{i+1} = k \mid X_i = j)$ a été déterminé à la question précédente. D'où :

$$P(X_{i+1} = k) = \underbrace{P(X_{i+1} = k \mid X_1 = k)}_{=0} P(X_1 = k) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{1}{n-1}\frac{1}{n} = (n-1)\frac{1}{n-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

     Donc $X_{i+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, ce qui prouve $\mathcal{Q}_{i+1}$.
   - Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket).}$

   (c) $P(X_i = 1 \cap X_{i+1} = 1) = 0$ car si on tire la boule numéro 1 au i^{eme} tirage, on la retire de l'urne. Donc ne peut pas la tirer la boule 1 à la fois au i^{eme} et au $(i+1)^{ieme}$ tirage.
   Or $P(X_i = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_{i+1} = 1) = \dfrac{1}{n}$ d'après la question précédente.
   Donc $P(X_i = 1 \cap X_{i+1} = 1) \neq P(X_i = 1)P(X_{i+1} = 1)$.
   $\boxed{\text{Donc } X_i \text{ et } X_{i+1} \text{ ne sont pas indépendantes.}}$