Cours

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Donner la définition de f est dérivable en a .
2. Citer le théorème de Rolle.
3. Citer le théorème des accroissements finis.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1}{1+x}$.

On considère aussi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0$.
2. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, que l'on notera r . Préciser la valeur de r .
3. En déduire l'ensemble des points fixes de f sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
4. Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est stable par f , c'est à dire que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
6. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
7. Montrer que $\forall (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{4}{9}|y - x|$.
8. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{4}{9}|u_n - r|$.
9. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
10. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
11. Déterminer une valeur de n à partir de laquelle le terme u_n est une valeur approchée de r à 10^{-6} près. On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes : $\ln 2 \simeq 0,7, \ln 3 \simeq 1,1, \ln 10 \simeq 2,3$.
12. Écrire une fonction python `valeurapprochee(eps)` qui prend en entrée un réel strictement positif `eps` et qui renvoie une valeur approchée de r à `eps` près.