INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 20 - CORRECTION

Problème

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1+x>0$ donc on peut multiplier l'égalité par $1+x$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f(x)=x &\iff \frac{1}{1+x}=x\\ &\iff 1=x(1+x)\\ &\iff x^2+x-1=0\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x)=x \iff x^2+x-1=0}$.

2. L'équation $x^2+x-1=0$ est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 1+4=5>0$.
Donc elle admet 2 racines réelles distinctes : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Or $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ donc cette racine n'appartient pas à $\left[\frac{1}{2},1\right]$.
Et $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ donc $2<\sqrt{5}<3$. Donc $\dfrac{-1+2}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{-1+3}{2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$.
$\boxed{\text{Donc l'équation } x^2+x-1=0 \text{ admet une unique solution dans } \left[\frac{1}{2},1\right], \text{ c'est } r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

3. Puisque l'ensemble des points fixe de f est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=x$, on déduit des questions précédentes que $\boxed{\text{l'ensemble des points fixes de } f \text{ sur } \left[\frac{1}{2},1\right] \text{ est } \left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

4. On pose $I=\left[\frac{1}{2},1\right]$.
Soit $x\in I$ fixé quelconque. Donc $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.
Donc $0<\dfrac{3}{2}\leqslant 1+x\leqslant 2$. On applique la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où : $\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant \frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3}\leqslant 1$, donc $f(x)\in I$.
$\boxed{\text{On en déduit que } I \text{ est stable par } f.}$

5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n\in I\text{"}$$

• (I) $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0=1$, existe et appartient à I.
• (H) Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Donc u_n existe et appartient à I. Puisque f est définie sur I, on en déduit que $f(u_n)$ existe (c'est u_{n+1}). De plus, I est stable par f. Donc $f(u_n)\in I$. Ainsi, u_{n+1} existe et appartient à I. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• (C) Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie, à valeurs dans } I}$.

6. f est l'inverse de la fonction $x\mapsto 1+x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction polynomiale) et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall x\in I,\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, donc $\frac{3}{2}\leqslant 1+x\leqslant 2$, donc $0<\frac{9}{4}\leqslant (1+x)^2\leqslant 4$ (on applique la fonction

$t \mapsto t^2$, croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puis, en appliquant $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\forall x \in I,\ \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{4}{9}$. Donc $-\frac{4}{9} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{4}{9}$. $\boxed{\text{Donc } \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}}$.

7. Nous avons montré précédemment que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis (à prouver, voir cours), $\boxed{\forall (x,y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}|y - x|}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Nous avons montré que la suite $(u_n)_{n in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans I. Donc $u_n \in I$. De plus, $r \in I$ (montré question 2). Donc on peut appliquer l'inégalité précédente à u_n et r : $|f(u_n) - f(r)| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(r) = r$ (r est un point fixe de f). Donc $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r|$.

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r|}$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{« } |u_n - r| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n \text{ »}$$

   • $\mathcal{P}_0$ est vraie car $|u_0 - r| = |1 - r|$. Or $0 \leqslant r \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - r \leqslant 1$. Donc $|1 - r| \leqslant 1$. Ainsi $|u_0 - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^0$

   • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
   D'après la question précédente, $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r|$. Or $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ d'après $\mathcal{P}_n$, donc $\dfrac{4}{9}|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$. Ainsi, $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$.
   Donc $|u_{n+1} - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   • Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n}$.
10. On déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ r - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n \leqslant u_n \leqslant r + \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
   Or $\left|\dfrac{4}{9}\right| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$.
   Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r - \left(\frac{4}{9}\right)^n = r$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r + \left(\frac{4}{9}\right)^n = r$. Ces limites sont égales, donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } r}$.
11. D'après l'égalité précédente, il suffit de trouver un entier n tel que $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6}$. (car alors, on a $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6}$).

Or

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6} &\iff n\ln\left(\tfrac{4}{9}\right) \leqslant -6\ln 10 \text{ (on a appliqué ln, croissante sur } \mathbb{R}_+^*\text{)}\\ &\iff 2n\ln\left(\tfrac{2}{3}\right) \leqslant -6\ln 10\\ &\iff 2n(\ln 3 - \ln 2) \geqslant 6\ln 10\\ &\iff n \geqslant \frac{3\ln 10}{\ln 3 - \ln 2}\end{aligned}$$

Or, avec les valeurs approchées données dans l'énoncé, $\dfrac{3\ln 10}{\ln 3 - \ln 2} \simeq \dfrac{3\times 2,3}{1,1-0,7}$.

Et $\dfrac{3\times 2,3}{1,1-0,7} = \dfrac{6,9}{0,4} = \dfrac{69}{4} = 17,25$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } n \geqslant 18, \text{ alors } u_n \text{ est une valeur approchée de } r \text{ à } 10^{-6}\text{-près.}}$

12. La fonction python ci-dessous renvoie une valeur approchée de r à `eps` près :

```python
def valeurapprochee(eps):
    n = 0
    u = 1
    while (4/9)**n>eps:
        u = 1/(1+u)
        n = n + 1
    return u
```