# Chapitre 28 : Applications linéaires et matrices

## Table des matières

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ fixés dans tout le chapitre.

# 1 Généralités

## 1.1 Définitions

**Définition 1.**

On appelle application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ toute fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ telle que :

1. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^p)^2, \; f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^p, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

**Exemple 2**

1. Soit $E = F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto 3x$ est une application linéaire.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto 3x + 2y$ est une application linéaire.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto 3x + 2y - 1$ n'est pas une application linéaire.

**Théorème 3.**

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.
Si $f$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ alors $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

**Théorème 4.**

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. $f$ est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^p)^2, \; \forall \lambda \in \mathbb{K}, \; f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

**Exemple 5** Soit $E = F = \mathbb{R}^2$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est une application linéaire.

**Exemple 6** Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $F = \mathbb{R}$. Montrer que $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ est une application linéaire.

**Exemple 7** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $E = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$ et $F = \mathbb{K}_{n-1}[\mathbf{X}]$. Montrer que $f : P \mapsto P'$ est linéaire.

## 1.2 Opérations sur les applications linéaires

**Théorème 8.**

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2, \; \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \; \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$$

*La somme de deux applications linéaires ou la multiplication par un scalaire d'une application linéaire est encore une application linéaire.*

**Théorème 9.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.
*(La composée d'applications linéaires est une application linéaire)*

**Exemple 10** $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[\mathbf{X}] \to \mathbb{K} \\ P \mapsto P'(0) \end{array} \right.$ est une application linéaire.

**Théorème 11.**

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.
Si $f$ est linéaire et bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ alors $f^{-1}$ est un linéaire et bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
*(La bijection réciproque d'une bijection linéaire est linéaire)*

### 1.3 Applications linéaires déjà rencontrées

**Exemple 12**

## 2 Noyau et Image d'une application linéaire

### 2.1 Définitions

**Définition 13.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. On appelle noyau de $f$ et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des antécédents de $0_{\mathbb{R}^n}$ :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$
2. On appelle image de $f$ et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par $f$ des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ :
$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^p) = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}^p\} = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \exists x \in \mathbb{R}^p,\ y = f(x)\}$$

**Exemple 14** Déterminer le noyau et l'image de $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \end{array} \right.$.

**Exemple 15** Déterminer le noyau et l'image de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y, y - x)$.

**Exemple 16** Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z) \end{array}$$
Donner des vecteurs du noyau et des vecteurs de l'image de $f$. Déterminer $\ker f$. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

**Exemple 17** Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, -x + 3y, 2y) \end{array}$$
Déterminer $\ker f$. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

**Exemple 18** Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + 4y - 2z \end{array}$$

Déterminer $\ker f$. Déterminer $\text{Im} f$.

**Théorème 19.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. $\text{Ker}(f)$ est un sous$-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
2. $\text{Im}(f)$ est un sous$-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

**Exemple 20** Montrer que $A = \{P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}],\ P(0) = 0\}$ est un sous$-$espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ de dimension finie. Donner une base de $A$.

### 2.2 Lien avec surjectivité et injectivité

**Théorème 21.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. $f$ est surjective signifie que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.
2. $f$ est injective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.

**Exemple 22** Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y+z, x+y-z) \end{array} \right.$.
Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 23** La fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[\mathbf{X}] \to \mathbb{R}[\mathbf{X}] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?

## 3 Matrices d'une application linéaire

**Remarque 24** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.
Pour définir complètement $f$, de quels vecteurs a-t-on besoin ?

### 3.1 Image d'une base par une application linéaire

**Théorème 25.**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que $\forall i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) = v_i$.

**Remarque 26** Cette proposition dit qu'une application linéaire est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

**Exemple 27** Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (1,2)$ et $f(0,0,1) = (2,1)$ et la déterminer.
En donner sa matrice dans les bases canoniques.

**Exemple 28** Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(2,1) = (1,1,0)$ et $f(-1,1) = (0,1,1)$ et la déterminer.
En donner sa matrice dans les bases canoniques.

## 3.2 Définition

**Définition 29.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

On appelle matrice de l'application $f$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de la famille de vecteurs $f(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \ldots & f(e_j) & \ldots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{2,q} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,q} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & a_{p,j} & \ldots & a_{p,q} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

**Exemple 30** Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto \left(x+y, x-y, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{cases}$
Exprimer la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 31** Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = ((1,1),(1,-1))$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x+y) \end{array}.$$

1. Déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$.

**Théorème 32.**

Soient $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^p$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

*Les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont obtenues en calculant $M.X$.*

**Remarque 33** Appliquer une application linéaire peut se ramener à calcul matriciel.

## 3.3 Matrices et opérations sur les applications linéaires

**Théorème 34.**

Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_F$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f + \lambda.g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + \lambda.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g).$$

**Théorème 35.**

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{B}_F$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_G$ une base de $\mathbb{R}^q$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

**Remarque 36** Le produit matriciel, comme la composée, ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.

**Théorème 37.**

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^k) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f \circ \cdots \circ f) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\big)^k.$$

**Remarque 38** Il est donc utile de savoir calculer facilement des puissances de matrices carrées.

**Exemple 39** Soient

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, y+z) \end{array} \right. \quad , \; g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y, x-y, x+y) \end{array} \right.$$

Peut-on composer $f$ et $g$ ? Dans quel ordre ? Déterminer la composée qui est définie et sa matrice dans les bases canoniques.

**Théorème 40.**

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$.
Si $f$ est bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice inversible et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\big)^{-1}$$

**Remarque 41** Il est donc utile de savoir inverser facilement des matrices.

## 3.4 Application canoniquement associée à une matrice

**Théorème 42.**

Soient $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.
L'application suivante est linéaire :

$$f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

On l'appelle application linéaire canoniquement associée à la matrice $A$.

**Exemple 43** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application canoniquement associée à $A$.

**Exemple 44** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M$.
Expliciter $f$, $f^2$, $f^3$.

# 4 Rang d'une application linéaire

## 4.1 Théorème du rang

**Définition 45.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
On appelle rang de $f$ et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de son image : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

**Théorème 46.**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Alors, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

**Exemple 47** Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, y-z, x+y) \end{array} \right.$
Déterminer le noyau, l'image et le rang de $f$.

**Théorème 48** (Théorème du rang)**.**

Soient $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et $F$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) .$$

**Exemple 49** Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array} \right.$
Déterminer le rang de $f$ puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

**Théorème 50.**

Soient $E$ et $F$ deux $K-$espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $f$ est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
2. $f$ est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.
3. $f$ est bijective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim F$.

**Théorème 51.**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels **de même dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On a équivalence entre :

1. $f$ est bijective de $E$ dans $F$
2. $f$ est injective de $E$ dans $F$
3. $f$ est surjective de $E$ dans $F$

**Exemple 52** Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, y+z, x+y+z) \end{array} \right.$
Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 53** Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$

1. Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}_2[\mathbf{X}]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer son application réciproque. On commencera par déterminer $f^{-1}(1,0,0)$, $f^{-1}(0,1,0)$, et $f^{-1}(0,0,1)$.

## 4.2 Lien avec les autres définitions de rang

**Théorème 54.**

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Le rang de $A$ est le rang du système associé à $A$ : $AX = 0_n$.
2. Le rang de $A$ est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à $A$.
3. Le rang de $A$ est le rang de la famille de vecteurs formée par les colonnes de $A$.

**Exemple 55** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de $A$ de deux manières.

**Exemple 56** Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, -y+z, x+y+z) \end{array} \right.$. Déterminer le rang de $f$.

**Exemple 57** Soit $\mathcal{F} = ((0,1,2), (-1,-1,1), (1,0,2), (0,-1,3))$. Déterminer le rang de $\mathcal{F}$.