Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y+5 \end{array} \right.$
3. $h : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0)+P(1) \end{array} \right.$
4. $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x-z) \end{array} \right.$
5. $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (z,x,y) \end{array} \right.$
6. $\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f'+f \end{array} \right.$

Lorsqu'elles le sont et que c'est possible, donner leur matrice dans les bases canoniques associées.

Correction

1. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $\exists\,(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u=(x_1,y_1)$ et $v=(x_2,y_2)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)$.
   $$f(u+\lambda.v) \quad = \quad x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2 = x_1+y_1+\lambda(x_2+y_2) = f(u)+\lambda.f(v)$$
   Par la caractérisation, f est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
   $f(1,0)=1$ et $f(0,1)=1$ donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}$.
2. $f(0,0) \neq 0$ donc f n'est pas linaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $f(P+\lambda.Q) = (P+\lambda.Q)(0)+(P+\lambda.Q)(1) = P(0)+\lambda.Q(0)+P(1)+\lambda.Q(1)$
   $= P(0)+P(1)+\lambda(Q(0)+Q(1)) = f(P)+\lambda f(Q)$.
   Par la caractérisation, f est linéaire de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ dans $\mathbb{R}$.
   Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
   $f(1)=2=2.1+0\mathbf{X}+0\mathbf{X}^2$ et $f(\mathbf{X})=1=2.1+0\mathbf{X}+0\mathbf{X}^2$ et $f(\mathbf{X}^2)=1=2.1+0\mathbf{X}+0\mathbf{X}^2$ donc
   $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.
4. Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. $\exists\,(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que $u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2)$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$.
   $$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda.v) & = & (x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2\ ,\ x_1+\lambda x_2-z_1-\lambda z_2) \\ & = & (x_1+y_1\ ,\ x_1-z_1)+\lambda(x_2+y_2\ ,\ x_2-z_2) \\ & = & f(u)+\lambda.f(v) \end{array}$$
   donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.
   $f(1,0,0)=(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$, $f(0,1,0)=(1,0)$ et $f(0,0,1))=(0,-1)=-1(0,1)$ donc
   $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.
5. Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. $\exists\,(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que $u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2)$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $u+\lambda.v = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)$.
   $$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda.v) & = & (z_1+\lambda z_2\ ,\ x_1+\lambda x_2\ ,\ y_1+\lambda y_2) \\ & = & (z_1,x_1,y_1)+\lambda(z_2,x_2,y_2) \\ & = & f(u)+\lambda f(v) \end{array}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
Pour la matrice, on calcule les images de chacun des vecteurs de la base canonique.

$f(1,0,0) = (0,1,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (1,0,0)$ donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

6. Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\phi(f+\lambda g) = (f+\lambda g)' + f + \lambda g = f' + f + \lambda(g'+g) = \phi(f) + \lambda\phi(g)$$

donc ϕ est linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
L'espace de départ n'est pas de dimension finie donc il n'est pas possible d'écrire la matrice de f.

Exercice 2 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y,0,z,z) \end{cases}$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donnez en une base.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et donnez en une base.

Correction

1. $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x+y,0,z,z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,-x,0,t) \in \mathbb{R}^4\}$
$=\mathrm{Vect}((1,-1,0,0),(0,0,0,1))$.
Cette famille est libre car les vecteurs sont non colinéaires , c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
2. $\mathrm{Im}(f) = \{(x+y,0,0,t),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ $=\mathrm{Vect}((1,0,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,1))$ $=\mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,0,0,1))$.

   Cette famille est libre car les vecteurs sont non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   Donc, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Exercice 3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y,x-y) \end{cases}$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Correction

1. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $\exists\,(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = (x_1,y_1)$ et $v = (x_2,y_2)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u + \lambda.v = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2)$.

$$\begin{aligned} f(u+\lambda.v) &= (x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2\ ,\ x_1+\lambda x_2-y_1-\lambda y_2) = (x_1+y_1\ ,\ x_1-y_1) + \lambda(x_2+y_2\ ,\ x_2-y_2) \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

   donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. On va utiliser la caractérisation de la bijectivité pour les applications linéaires.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x+y,x-y) = (0,0)\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y = 0 \text{ et } x-y = 0\right\} = \{(0,0)\}$$

   Donc, f est injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   De plus, puisque l'espace vectoriel de départ et d'arrivée ont la même dimension, f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\exists!\ u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(u) = v$. Donc, $(x+y,x-y) = (a,b)$.

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array} \right. \Rightarrow u = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2} \right).$

Ainsi, $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \mapsto \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2} \right) \end{array} \right.$

3. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$.
   $f(1,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ et $f(0,1) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$.
   Donc, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$ et $f(0,0,1) = (1,1,1)$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
3. Déterminez le noyau et l'image de f.

Correction

1. La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Par le théorème 8, on a bien l'existence et l'unicité d'une telle application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) = f(x,y,z) &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,1,1) \\ &= (x+y+z\ ,\ y+z\ ,\ x) \end{aligned}$$

3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x+y+z, y+z, x) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}}$. (Ainsi, f est injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$).

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \text{Vect}((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.
Or, la famille $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$.
(Ainsi, f est surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$).

Exercice 5 Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$

1. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction

1. Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(M + \lambda.N) = {}^t(M + \lambda.N) = {}^tM + \lambda {}^tN = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$$

Par la caractérisation, φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On va utiliser la caractérisation des applications linéaires bijectives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $\text{Ker}(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = 0\} = \{0\}$. Donc, f est injective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $\text{Im}(\varphi) = \{{}^tM, \ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, f est surjective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Finalement, φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Posons $\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   $\varphi(e_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$,

   $\varphi(e_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3$,

   $\varphi(e_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$,

   $\varphi(e_4) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4$.

   Donc, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Correction Le rang n'est pas modifié par les opération élémentaires sur les lignes.

$$\text{rg}(A) \underset{L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rg}(B) \underset{L_1 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rg}(C) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est échelonnée et elle a 3 pivots (non nuls) donc $\text{rg}(C) = 3$.

On va étudier les différentes valeurs possibles pour a et b.

- Si $a = 0$: par échange des lignes (opérations élémentaires sur les lignes) on obtient :
  $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est échelonnée et
  - Si $b = 0$, $\mathrm{rg}(D) = 0$ (D est la matrice nulle)
  - Si $b \neq 0$, $\mathrm{rg}(D) = 4$.
- Si $a \neq 0$: on fait subir à D l'algorithme du pivot de Gauss : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a}L_1$ puis $L_3 \leftarrow L3 - \frac{b}{a}L_2$ puis $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{b}{a}L_3$.
  Ainsi, $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & -\frac{b^2}{a} \\ 0 & 0 & a & \frac{b^3}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & a - \frac{b^4}{a^3} \end{pmatrix}$.
  cette matrice est échelonnée puisque $a \neq 0$. Elle est de rang au moins 3. Son rang dépend de la valeur du coefficient en bas à gauche.

$$\begin{aligned} a - \frac{b^4}{a^3} = 0 &\iff \frac{a^4 - b^4}{a^4} = 0 \\ &\iff a^4 = b^4 \\ &\iff \left(\frac{b}{a}\right)^4 = 1 \text{ (car } a \neq 0) \\ &\iff \frac{b}{a} \in \{1, -1\} \end{aligned}$$

  Ainsi :
  • Si $a \neq 0$ et $b \in \{a, -a\}$, alors $\mathrm{rg}(D) = 3$.
  • Si $a \neq 0$ et $b \notin \{a, -a\}$, alors $\mathrm{rg}(D) = 4$.

Exercice 7 Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter f, $f^2 (= f \circ f)$ et f^3.
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker f^2$.
4. Déterminer $\ker f^3$.

Correction

1. - La matrice M est de taille 3 donc l'application linéaire f est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
     Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont données par $M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 14y + 2 \\ x - 4y \\ x - 10y + 2z \end{pmatrix}$.
     Donc, $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - 14y + 2, x - 4y, x - 10y + 2z) \end{cases}$

- On sait que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de f^2 est la matrice M^2.
  Or, $M^2 = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Donc, $f^2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (-8x+8y+8z, -2x+2y+2z, -6x+6y+6z) \end{array} \right.$
- On sait que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de f^3 est la matrice M^3.
  Or, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $f^3 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (0,0,0) \end{array} \right.$

2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad (2x-14y+2z, x-4y, x-10y+2z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-14y+2z=0 \\ x-4y=0 \\ x-10y+2z=0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x-14y+2z=0 \\ 6y-2z=0 \\ -6y+2z=0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-14y+2z=0 \\ z=3y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4y \\ z=3y \end{array} \right.$$

   Donc, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((4,1,3))}$.

3. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow (-8x+8y+8z, -2x+2y+2z, -6x+6y+6z) = (0,0,0) \Leftrightarrow -x+y+z=0$$

   Donc, $\boxed{\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))}$.
   Cette famille est libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2}$.

4. $f^3 = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f^3) = \mathbb{R}^3}$.

Exercice 8 [**]

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$ telle que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$.
   (a) Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{K}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$.
   (b) Montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}^3$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Correction

1. (a) $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$ donc il existe au moins un vecteur u de $\mathbb{K}^3$ tel que $f(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$.
   (b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$.
   On compose par f linéaire : $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = f(0_{\mathbb{K}^3}) = 0_{\mathbb{K}^3}$.
   Or, $f^3(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$ donc $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$.
   On compose de nouveau par f linéaire : $\lambda_1 f^2(u) + \lambda_2 f^3(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$.
   Or, $f^3(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$ donc $\lambda_1 f^2(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$.
   Or, $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$ donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$.
   En reprenant $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$, on en déduit que $\boxed{\lambda_2 = 0}$.
   Puis, en reprenant $\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$, on en déduit que $\boxed{\lambda_3 = 0}$.
   Finalement, $\boxed{(u, f(u), f^2(u)) \text{ est libre}}$.
   On est dans un espace vectoriel de dimension 3 donc, toute famille libre de 3 vecteurs est une base donc $\boxed{(u, f(u), f^2(u)) \text{ est une base de } \mathbb{K}^3}$.

(c) Posons $e_1 = u$, $e_2 = f(u)$ et $e_3 = f^2(u)$.
$f(e_1) = f(u) = e_2$, $f(e_2) = f^2(u) = e_3$ et $f(e_3) = f^3(u) = 0_{\mathbb{K}^3}$ donc

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. On raisonne par double implication.

<u>$\Rightarrow$:</u> Soit $x \in \operatorname{Im}(f)$. $\exists y \in E$ tel que $f(y) = x$. Donc $g(x) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = 0$.
Donc $x \in \operatorname{Ker}(g)$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.

<u>$\Leftarrow$:</u> Soit $x \in E$. $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Or, $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$ donc $g(f(x)) = 0$.
Donc, $g \circ f = 0$.