Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y+5 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathbf{X}] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0)+P(1) \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x-z) \end{cases}$
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (z,x,y) \end{cases}$
6. $\phi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f'+f \end{cases}$

Lorsqu'elles le sont et que c'est possible, donner leur matrice dans les bases canoniques associées.

Exercice 2 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \mapsto (x+y, 0, z, z) \end{cases}$

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et donnez en une base.
2. Déterminer $\text{Im}(f)$ et donnez en une base.

Exercice 3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$ et $f(0,0,1) = (1,1,1)$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
3. Déterminez le noyau et l'image de f.

Exercice 5 Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{cases}$

1. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter f, $f^2(= f \circ f)$ et f^3.
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker f^2$.
4. Déterminer $\ker f^3$.

Exercice 8 [**]

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$ telle que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$.
   (a) Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{K}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$.
   (b) Montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}^3$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$