

Prénom :

Nom :

Interrogation n°21 : Espaces vectoriels et dimension A

15 $\frac{1}{2}$ 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Citer la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$.

15 $\frac{1}{2}$ Donner la définition de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

1 3. Soit E un espace vectoriel. Donner la définition d'une base de E .

4. Donner une base des espaces vectoriels suivants :

1 (a) $E = \mathbb{R}^4$ $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$

1 (b) $E = \mathbb{R}_2[X]$ $(1, x, x^2)$

1 (c) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 5. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel.

6. Exercices

1 (a) La famille $\mathcal{F} = ((0, 1, 2), (1, 2, 3), (0, 0, 1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1 (b) Soit $G = \{(b+c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer la dimension de G .

6) (a) $\text{card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc on étudie seulement la liberté.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(1, 2, 3) + \lambda_3(0, 0, 1) = 0$

$$\text{Donc } \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$

Ces 2 vecteurs sont non colinéaires donc ils forment une base de G .

Donc, $\dim(G) = 2$.