

Chapitre 29 : Intégration d'une fonction continue sur un segment

Table des matières

1 Notions d'intégrale

1.1 Définition pour une fonction positive

Définition 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **positive et continue** sur $[a, b]$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)dt$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$\mathcal{D}$ est le domaine délimité par la courbe de f , les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses.

On note également cette quantité $\int_a^b f$.

Exemple 2 Soit $f : x \rightarrow 2x + 3$. Déterminer $\int_0^1 f(t)dt$.

Remarque 3 La lettre t est appelée variable d'intégration. Elle est correctement définie par le symbole $\int$. Elle est muette et peut-être remplacée par une autre lettre, **pas déjà utilisée**. Elle n'existe plus en dehors de l'intégrale.

1.2 Définition pour une fonction de signe quelconque

Définition 4.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$.

On note

$$f_+ : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \max(f(x), 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_- : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \max(-f(x), 0) \end{cases}$$

- f_+ est la partie positive de f et f_- est la partie négative de f .
- $\forall x \in [a, b]$, $f_+(x) \geq 0$ et $f_-(x) \geq 0$ et $f = f_+ - f_-$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)dt$ la quantité défini par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_+(t)dt - \int_a^b f_-(t)dt$$

Définition 5 (Echange des bornes).

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a \leq b$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$.

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)dt = 0.$$

2 Méthodes de calculs

2.1 A l'aide d'une primitive

Théorème 6.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Soit F une primitive de f sur I . Soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Alors,

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 7 $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+5} dx = [\ln(x^2+5)]_0^1 = \ln(6) - \ln(5) = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$

Exemple 8 Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt.$

Remarque 9 Il faut connaître des primitives usuelles.

Exemple 10 Calculer $\int_0^\pi \cos^2(t) dt.$

Exemple 11 Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+t^2} dt.$

2.2 Intégration par parties

Définition 12.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I .
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Théorème 13.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$.

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Exemple 14 Calculer $A = \int_0^1 te^{2t} dt.$

Exemple 15 Calculer $A = \int_1^{e^2} \ln(t) dt.$

2.3 Changement de variables

Théorème 16.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .
 Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J tel que $\phi(J) \subset I$.
 Soit $(a, b) \in J^2$ avec $a \leq b$.

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Méthode 1.

Le changement de variable se passe en 3 étapes :

1. On pose $x = \phi(t)$. (donné dans l'énoncé, sauf dans des cas simples)
2. On "dérive" pour obtenir $dx = \phi'(t)dt$.
3. On remplace les bornes, le dt et le $\phi(t)$.

Exemple 17 Via le changement de variable $u = e^t$, calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt$.

Théorème 18.

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $I = [-a, a]$.

1. Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Théorème 19.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T . Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Règles de calcul

Théorème 20.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues sur $[a, b]$.
 L'intégrale a les propriétés suivantes :

1. **Linéarité** : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. **Relation de Chasles** : $\forall c \in [a, b], \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

3.2 Intégrales et inégalités

Théorème 21.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues sur $[a, b]$.
L'intégrale a les propriétés suivantes :

1. **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
2. **Positivité** : Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
3. **Croissance** : Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Exemple 22 Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$.

1. Montrer que la suite u est croissante.
2. Montrer que la suite u est bornée.
3. En déduire que la suite u est convergente.

Théorème 23.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ **de signe constant**.

1. Si f est strictement positive, sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f > 0$.
2. Si f est strictement négative, sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f < 0$.
3. $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$ sur $[a, b]$.

3.3 Valeur moyenne

Théorème 24.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.
Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$.
Alors,

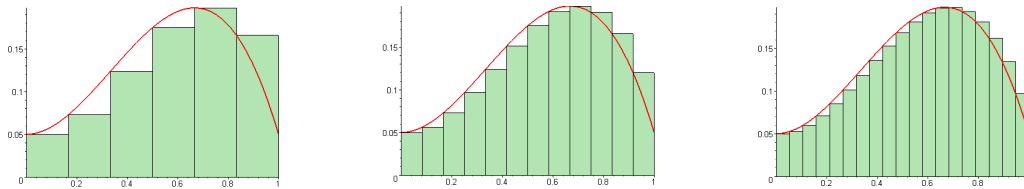
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Plus précisément, $\exists c \in]a; b[$ tel que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = f(c)$.

La valeur moyenne appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.

4 Applications

4.1 Sommes de Riemman


Théorème 25.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Théorème 26 (Version générale.).

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Exemple 27 Etudier la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$.

Exemple 28 On s'intéresse à la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n^2 - k^2}}$.
Montrer qu'elle converge et exprimer sa limite à l'aide d'une intégrale.

4.2 Valeur approchée d'une intégrale

En voyant l'intégrale comme une limite de suites, on peut approcher la valeur d'une intégrale avec le code suivant.

```
1 def rectangle(f,a,b,n):
2     S=0
3     h=(b-a)/n
4     for i in range(n):
5         S=S+f(a+i*h)
6     return h*S
```

4.3 Fonction définie par une intégrale

Théorème 29 (Théorème fondamental de l'analyse).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Autrement dit, F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 30 Soit $G : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée.