Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \int_0^1 (x^2+3x+12)\mathrm{d}x$.
2. $B = \int_0^1 \mathbf{e}^{3x}\mathrm{d}x$.
3. $C = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.
4. $D = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.
5. $E = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$.
6. $F = \int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$
4. [*] $\int_1^2 \mathbf{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$ avec $t = x^3$
2. $\int_1^{\mathbf{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x$ avec $t = \ln(x)$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x$ avec $t = \sin(x)$.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 5

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n\mathrm{d}t$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 6 Déterminer la limite des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 7 On s'intéresse aux fonctions définies par $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto xf(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g.
2. Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée.
3. Déterminer les variations de g.
4. Pour $x \in]-1,0[$, proposer une minoration de $g(x)$. En déduire $\lim_{x\to-1^+} g(x)$.

<u>Exercice 8</u> Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_{n+1} \leq I_n$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   On pourra utiliser une intégration par parties
5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$.
6. Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante.

<u>Exercice 9</u> [*] Par une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^1 x(\arctan(x))^2 \mathrm{d}x$$

Penser à bien choisir les primitives

<u>Exercice 10</u> [*] *Comparaison suites-intégrales*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{t} \mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{k}$.
   On pourra utiliser la monotonie de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$.
2. En déduire que
   $$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$
3. En déduire que $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

<u>Exercice 11</u> [*]

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$.
   Étudier la limite, quand x tend vers 1, de $\dfrac{1}{x-1} \int_1^x f(t) \mathrm{d}t$.
2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1, de $\dfrac{1}{x-1} \int_1^x \dfrac{t^3}{1+t^3} \mathrm{d}t$.

<u>Exercice 12</u> [*] Soit $R > 0$.

1. Soit D l'aire du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R.
   A l'aide d'un dessin, montrer que
   $$D = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \mathrm{d}x$$
2. A l'aide du changement de variable $x = R\sin(u)$, montrer que
   $$D = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \mathrm{d}u$$
3. Retrouver le résultat connu.