Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes.

1. $A = \int_0^1 (x^2 + 3x + 12)\mathrm{d}x$.
2. $B = \int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.
3. $C = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.
4. $D = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.
5. $E = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$.
6. $F = \int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$
4. [*] $\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x$

Correction

1. On pose $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

2. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x &= \Big[-x\cos(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 (-\cos(x))\mathrm{d}x = -2\cos(2) + \cos(1) + \Big[\sin(x)\Big]_1^2 \\ &= -2\cos(2) + \cos(1) + \sin(2) - \sin(1)\end{aligned}$$

3. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}} \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = 2\sqrt{3x+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \left[2x\sqrt{3x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{3x+1}\mathrm{d}x = 4 - 2\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$$
Or, $x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ sur $[0,1]$ donc
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = 4 - 2\left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 4 - \frac{4}{9}(8-1) = \frac{8}{9}$$

4. On pose $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{3x} \\ v'(x) = \cos(5x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} \\ v(x) = \frac{\sin(5x)}{5} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ et par la formule de l'intégration par parties,
$$\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{3x}\frac{\sin(5x)}{5}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3}{5}\mathrm{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathrm{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x$$
On fait une seconde intégration par parties avec $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{3x} \\ v'(x) = \sin(5x) \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} \\ v(x) = -\frac{\cos(5x)}{5} \end{cases}$.
$$\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\sin(5x)\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{3x}\frac{\cos(5x)}{5}\right]_1^2 + \frac{3}{5}\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathrm{e}^3\frac{\cos(5)}{5} + \frac{3}{5}\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathrm{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\left(-\mathrm{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathrm{e}^3\frac{\cos(5)}{5} + \frac{3}{5}\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x\right)\\
\left(1+\frac{9}{25}\right)\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathrm{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\left(-\mathrm{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathrm{e}^3\frac{\cos(5)}{5}\right)\\
\int_1^2 \mathrm{e}^{3x}\cos(5x)\mathrm{d}x &= \frac{25}{34}\left[\mathrm{e}^6\frac{\sin(10)}{5} - \mathrm{e}^3\frac{\sin(5)}{5} - \frac{3}{5}\left(-\mathrm{e}^6\frac{\cos(10)}{5} + \mathrm{e}^3\frac{\cos(5)}{5}\right)\right]
\end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$ avec $t = x^3$ 2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x$ avec $t = \ln(x)$. 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x$ avec $t = \sin(x)$.

Correction

1. On utilise le changement de variables $t = x^3$. On a donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$.
   De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ et pour $x = 1$, on a $t = 1$.
   Finalement,
   $$\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$
2. On pose $t = \ln(x)$. On a donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
   De plus, pour $x = 1$, on a $t = 0$ et pour $x = \mathrm{e}$, on a $t = 1$. Finalement,
   $$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$
3. On pose $t = \sin(x)$. On a donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos(x)} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2(x)\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
   De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{6}$, on a $t = \frac{1}{2}$. Finalement,
   $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$ existe.
   En utilisant une primitive, on obtient $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ existe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0;1]$. $1 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissante de l'intégrale, on a donc $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.
   Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 5

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 0$.
2. On va comparer l'intégrale à étudier à celle de la question précédente. Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$.
   Toute fonction continue sur un segment y est bornée (et atteint ses bornes).
   $\exists\,(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [0;1],\ m \leq f(t) \leq M$.
   $$\begin{aligned}
   &\Rightarrow \quad \forall t \in [0;1],\ m \leq f(t) \leq M \\
   &\Rightarrow \quad \forall t \in [0;1],\ m.t^n \leq f(t).t^n \leq M.t^n \\
   &\Rightarrow \quad \int_0^1 m.t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t).t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 M.t^n \mathrm{d}t \\
   &\Rightarrow \quad \frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 f(t).t^n \mathrm{d}t \leq \frac{M}{n+1}
   \end{aligned}$$
   Par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 6 Déterminer la limite des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Correction On va modifier l'écriture pour faire apparaître la fonction f à utiliser dans le théorème des sommes de Riemann.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$
   où f est la fonction définie par $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$. La fonction f est continue sur $[0,1]$.
   Par le théorème des sommes de Riemann,
   $$\lim_{n\to+\infty} c_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$$
   .
   Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{\ln(2)}{3}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{b_n}{n} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
   où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \sin(\pi x)$. La fonction f est continue

sur $[0,1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} = \int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

.

Finalement, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$
   où f est la fonction définie par $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x\cos(\pi x)$. La fonction f est continue sur $[0,1]$. Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 x\cos(\pi x)\mathrm{d}x$$

   .

   On utilise alors une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \left[x\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}$$

   .

   Finalement, $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi^2}$.

Exercice 7 On s'intéresse aux fonctions définies par $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto xf(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g.
2. Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée.
3. Déterminer les variations de g.
4. Pour $x \in]-1,0[$, proposer une minoration de $g(x)$. En déduire $\lim_{x\to-1^+} g(x)$.

Correction

1. La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc f est définie sur $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \notin [0,x]\} =]-1;+\infty[$. Par produit, la fonction g est aussi définie sur $]-1;+\infty[$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}$ est continue sur $]-1,+\infty[$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$$

3. Par produit, g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ g'(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}dt + x.\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$$

   On va étudier le signe de g'.
   Soit $x \in [0,+\infty[$. Par positivité de l'intégrale et de l'exponentielle, $g'(x) \geq 0$.
   Soit $x \in]-1,0[$.

$$g'(x) = -\int_x^0 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}dt + x.\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$$

   Donc, $g'(x) \leq 0$.
   Finalement, g est décroissante sur $]-1,0[$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

4. Soit $x \in]-1,0[$. On a donc $g(x) = -x\displaystyle\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
&\forall t \in]-1,0[,\ \frac{\mathbf{e}^t}{1+t} \geq \frac{\mathbf{e}^{-1}}{(1+t)} \\
\Rightarrow\ & \int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t \geq \int_x^0 \frac{1}{\mathbf{e}(1+t)}\mathrm{d}t \qquad \text{par croissance de l'intégrale} \\
\Rightarrow\ & \int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t \geq -\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} \\
\Rightarrow\ & -x\int_x^0 \frac{\mathbf{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t \geq x\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} \text{ car } -x \geq 0
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} x\frac{\ln(1+x)}{\mathbf{e}} = +\infty$. Par minoration, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$.

Exercice 8 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_{n+1} \leq I_n$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   On pourra utiliser une intégration par parties
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$.
6. Montrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\geq 0}$ est constante.

Correction

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\quad , \quad 0 < \cos(t) < 1 \\
&\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\quad , \quad 0 < (\cos(t))^{n+1} < (\cos(t))^n \text{ on a multiplié par } \cos(t)^n > 0
\end{aligned}$$

En intégrant sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$0 < I_{n+1} \leq I_n$$

3. La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante.

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \\
&\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}
\end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer I_{n+2} on va utiliser une intégration par parties avec
$\begin{cases} u'(x) = \cos(t) \\ v(x) = (\cos(t))^{n+1} \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} u(x) = \sin(t) \\ v'(x) = -(n+1)\sin(t)(\cos(t))^n \end{cases}$

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[\sin(t)(\cos(t))^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2(\cos(t))^n dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)(\cos(t))^n dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \\
I_{n+2} &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \\
I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} I_n
\end{aligned}$$

5. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$ donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$.
6. On calcule le premier terme pour avoir une idée de la valeur constante de cette suite : $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

   On pose comme hypothèse de récurrence : $P(n)$: $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$
   On a traité l'hérédité dans notre calcul précédent.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned}
(n+2)I_{n+1}I_{n+2} &= I_{n+1}(n+2)I_{n+2} = I_{n+1}(n+1)I_n \text{ par le calcul de la question 2.} \\
&= (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

   La suite est donc constante.

Exercice 9 [*] Par une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^1 x(\arctan(x))^2 \mathrm{d}x$$

Penser à bien choisir les primitives

Exercice 10 [*] *Comparaison suites-intégrales*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

   On pourra utiliser la monotonie de $t \mapsto \frac{1}{t}$.
2. En déduire que

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$

3. En déduire que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 11 [*]

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$.

   Étudier la limite, quand x tend vers 1, de $\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.
2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1, de $\frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^3}{1+t^3}\mathrm{d}t$.

<u>Exercice</u> 12 [*] Soit $R > 0$.

1. Soit D l'aire du disque de centre $(0,0)$ et de rayon R.
   A l'aide d'un dessin, montrer que
$$D = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$$
2. A l'aide du changement de variable $x = R\sin(u)$, montrer que
$$D = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\mathrm{d}u$$
3. Retrouver le résultat connu.