Chapitre 30 : Fonctions de deux variables

Table des matières

1 Notions fondamentales

1.1 Sous−ensembles de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$.

- D est un pavé de $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe deux intervalles de $\mathbb{R}$, I et J, tels que

$$D = I \times J$$

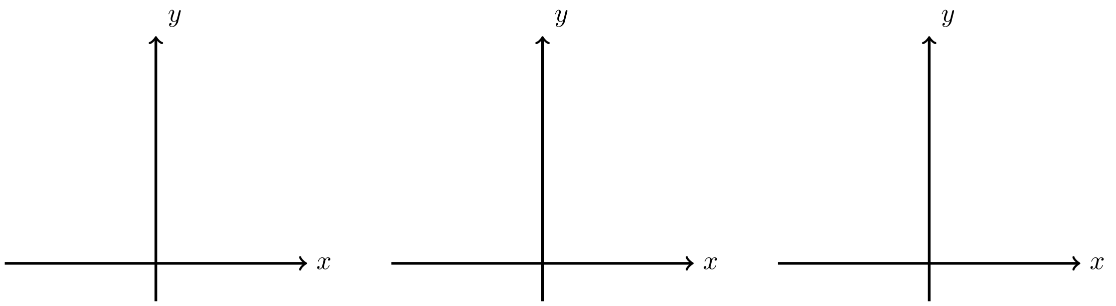
  Lorsque I et J sont ouverts, on parle de pavé ouvert.

- D est un disque de $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe $\Omega(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ tels que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ /\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\right\}$$

- D est un demi-plan de $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ tels que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ /\ y \geq ax + b\right\} \text{ ou } D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ /\ y \leq ax + b\right\}$$



1.2 Définitions

Définition 2.

Une application f est une fonction de deux variables réelles signifie qu'il existe $D \subset \mathbb{R}^2$ tel que

$$f : \left\{\begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{array}\right.$$

D est l'ensemble de définition de f.

Exemple 3

1. La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est une fonction de deux variables définie sur $D = \mathbb{R}^2$.
2. La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{\ln(x)}{y}$ est une fonction de deux variables définie sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$.

Définition 4.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On appelle fonctions partielles en (x_0, y_0) les fonctions définies par

$$f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0) \text{ et } f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$$

L'ensemble de définition de ces fonctions dépend de D.

Exemple 5 Pour $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$, les fonctions partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ sont des fonctions linéaires.

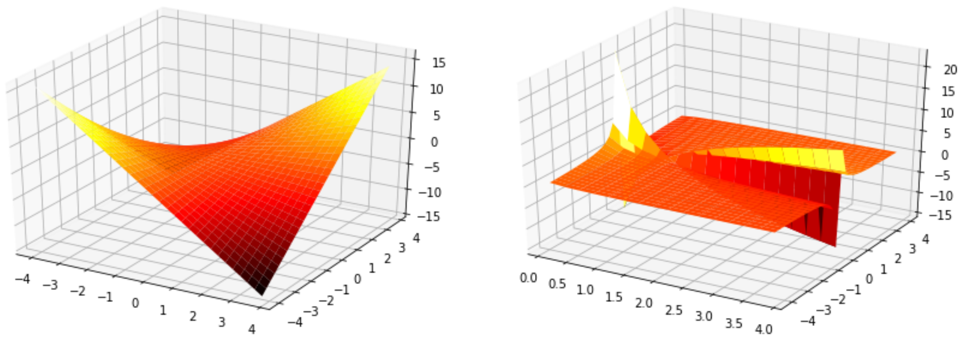
1.3 Surface et ligne de niveau d'une fonction de deux variables

Définition 6.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On appelle surface de f l'ensemble $S_f = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D\}$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau k de f l'ensemble $C_f = \{(x, y) \in D / \ f(x, y) = k\}$
C'est un sous-ensemble de D.

Exemple 7 Voici les surfaces des deux fonctions de l'exemple 1.



Exemple 8 Soit$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y + 1$. Déterminer la surface de f.

2 Régularité d'une fonction de deux variables

2.1 Continuité

Définition 9.

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que f est continue en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \,/\, \forall (x, y) \in D,\ ||(x - x_0, y - y_0)|| \leq \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$$

Définition 10.

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

Remarque 11 La continuité des fonctions partielles n'impliquent pas la continuité de f.

2.2 Dérivées partielles

Définition 12.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ telle que les fonctions partielles en tout point de D soient dérivables.

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à x la fonction notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ définie par

$$\forall (x, y) \in D,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_y(x, y)$$

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à y la fonction notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ définie par

$$\forall (x, y) \in D,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_x(x, y)$$

Remarque 13 Le symbole ∂ se lit *dé rond*.

Exemple 14 Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\ln(x)}{y}$. La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$.
Déterminer les dérivées partielles.

Exemple 15 Soient $n \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}$ fixés. Soit $f : (T, V) \mapsto nR\dfrac{T}{V}$.
Déterminer le domaine de définition de f puis ses dérivées partielles en tout point.

Remarque 16 Les dérivées partielles sont également des fonctions de deux variables.

Définition 17.

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D lorsque

- Les fonctions partielles sont dérivables,
- Les dérivées partielles sont continues sur D.

Théorème 18 (Opérations sur les dérivées partielles)**.**

Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et

$$\frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda . \frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda . \frac{\partial g}{\partial y}$$

2. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial (fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial y}$$

Théorème 19 ("Composée").

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Soit $u : \mathbb{R} \to I$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $v : \mathbb{R} \to J$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $F : t \mapsto f(u(t), v(t))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F'(t) = u'(t).\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t).\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

Exemple 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $F : t \mapsto f(t^2, t+2)$.
Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer F'.

2.3 Gradient et points critiques

Définition 21.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque 22 Là où le gradient est non nul, il est perpendiculaire à la courbe de niveau. Autrement dit, la tangente à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient.

Définition 23.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Soit $(x_0, y_0) \in D$.
On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exemple 24 Trouver les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 - 4x + y^3 - 3y$.

Théorème 25.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
La fonction f atteint son maximum et son minimum en des points critiques ou au bord du pavé.

Exemple 26 Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
Déterminer les extrema de f sur $[0, 3] \times [1, 5]$.

3 Dérivées partielles d'ordre deux

3.1 Définitions

Définition 27.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
On définit, lorsqu'elles existent, les dérivées d'ordre deux en (x_0, y_0) par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$$

Définition 28.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D lorsque les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 existent et sont continues sur D.

Exemple 29 Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Calculer les dérivées partielles d'ordre deux en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

3.2 Théorème de Schwarz

Théorème 30.

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

$$\forall (x_0,y_0) \in D, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

Exemple 31 Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$.