BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 8

— 1^{er} **juin 2024**—

Exercice 1

1.
```python
def Bernoulli(p):
  X=rd.random()
  if X<=p:
      return 1
  return 0
```

```python
def binomiale(n,p):
  X=0
  for i in range (1,n+1):
      X=X+Bernoulli(p)
  return X
```

3.
```python
import random as rd

def jeu():
    X=rd.randint(0,20)
    while X<17:
        X=rd.randint(0,20)
    return X
```

Exercice 2

1. L'endomorphisme canoniquement associé à f est :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-t, x+2y+2z-t, -x-2y-2z+t, x-t) \end{array}.$$

2. $\ker f = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (S) : \left\{ \begin{array}{l} x-t=0 \\ x+2y+2z-t=0 \\ -x-2y-2z+t=0 \\ x-t=0 \end{array} \right. \right\}$. Donc $\ker f$ est l'ensemble des solutions du système (S). Résolvons (S) :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccl} x & & & -t & =0 \\ & 2y & +2z & & =0 \\ & -2y & -2z & & =0 \\ & & & 0 & =0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccl} x & & & -t & =0 \\ & 2y & +2z & & =0 \\ & & & 0 & =0 \\ & & & 0 & =0 \end{array} \right. \text{ système échelonné, compatible.}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x=t \\ y=-z \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(t,-z,z,t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{t(1,0,0,1) + z(0,-1,1,0),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{vect}((1,0,0,1),(0,-1,1,0)). \end{aligned}$$

Donc la famille $((1,0,0,1),(0,-1,1,0))$ est une famille génératrice de $\ker f$. De plus, cette famille est libre car elle est constituée de deux vecteurs non-colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{B} = ((1,0,0,1),(0,-1,1,0)) \text{ est une base de } \ker f. \text{ Donc } \dim \ker f = 2}$.

3. D'après la question précédente, $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$, nous savons que :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Puisque f n'est pas injective, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

4. D'après le théorème du rang, nous savons que $\dim\ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^4$. Donc $\dim \mathrm{Im} f = 2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im} f &= \{f(x,y,z,t),\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\} \\
&= \{x(1,1,-1,1) + y(0,2,-2,0) + z(0,2,-2,0) + t(-1,-1,1,-1),\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\} \\
&= \mathrm{vect}((1,1,-1,1),(0,2,-2,0),(0,2,-2,0),(-1,-1,1,-1)) \\
&= \mathrm{vect}((1,1,-1,1),(0,2,-2,0),(-1,-1,1,-1)) (\text{car le vecteur } (0,2,-2,0) \text{ apparaît deux fois}).
\end{aligned}$$

Or on remarque que $(-1,-1,1,-1) = -(1,1,-1,1)$, d'où $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}((1,1,-1,1),(0,2,-2,0))$.

La famille $((1,1,-1,1),(0,2,-2,0))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$. Puisqu'elle est composée de deux vecteurs, et que $\dim \mathrm{Im} f = 2$, on en déduit que

$\boxed{((1,1,-1,1),(0,2,-2,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$.

5. Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \ker f$:

$\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}((1,1,-1,1),(0,2,-2,0))$. Or $f(1,1,-1,1) = (0,0,0,0)$ et $f(0,2,-2,0) = (0,0,0,0)$. Donc $(1,-1,-1,1)$ et $(0,2,-2,0)$ appartiennent à $\ker f$. Puisque $\ker f$ est stable par combinaisons linéaires (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$), on en déduit que toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs appartiennent à $\ker f$. Donc $\mathrm{vect}((1,1,-1,1),(0,2,-2,0)) \subset \ker f$, c'est à dire : $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.

Ainsi :

$$\begin{cases} \mathrm{Im} f \subset \ker f \\ \dim \mathrm{Im} f = \dim \ker f (= 2 \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On en déduit : $\boxed{\mathrm{Im} f = \ker f}$.

Calculons : $A^2 = 0_4$. Donc $\boxed{f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

6. Montrons que $\mathcal{C}$ est une famille libre.

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$x(1,0,0,1) + y(0,-1,1,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} x = 0 \\ -y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^4$. De plus, $\mathrm{Card}\,\mathcal{C} = \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

7.
- $f(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$, de coordonnées $(0,0,0,0)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- $f(0,-1,1,0) = (0,0,0,0)$, de coordonnées $(0,0,0,0)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- $f(0,0,1,0) = (0,2,-2,0) = 0(1,0,0,1) + (-2)(0,-1,1,0) + 0(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1)$.
- $f(0,0,0,1) = (-1,-1,1,-1) = (-1)(1,0,0,1) + (1)(0,-1,1,0) + 0(0,0,0,1) + 0(0,0,0,1)$.

D'où :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im} f = \ker f$.

Soit $u \in E$ fixé quelconque. $f^2(u) = f(f(u))$. Or $f(u) \in \mathrm{Im} f$, donc $f(u) \in \ker f$ (puisque $\mathrm{Im} f = \ker f$). D'où $f(f(u)) = 0_E$.

Donc $\forall u \in E,\ f^2(u) = 0_E$. On en déduit : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathrm{Im} f = \ker f, \text{ alors } f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

Réciproquement, montrons que si $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.
On suppose que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Soit $v \in \mathrm{Im} f$ fixé quelconque.
Il existe donc $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Donc $f(v) = fof(u) = f^2(u)$.

Or $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $f^2(u) = 0_E$. Donc $f(f(u)) = 0_E$. Donc $f(v) = 0_E$. Donc $v \in \ker f$.
Ainsi, $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.

Montrons qu'il n'y a pas égalité en général. Il nous suffit de trouver un exemple.
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On peut montrer que cette application linéaire vérifie $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, et $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}(e_2)$, $\ker f = \mathrm{vect}(e_2, e_3)$. On a bien $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ mais il n'y a pas égalité de ces sous-espaces vectoriels car ils sont de dimensions différentes.

Exercice 3.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\mathrm{rg}\ (A - \lambda I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Or le rang d'une matrice n'est pas modifié si on effectue des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Ainsi, en effectuant les opérations $L1 \leftrightarrow L2$ puis $C1 \leftrightarrow C2$, on obtient :

$$\mathrm{rg}\ A - \lambda I_3 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, cette matrice est échelonnée et de rang 3.
Si $\lambda = -1$, cette matrice est échelonnée, de rang 2.
Si $\lambda = 2$, on obtient

$$\mathrm{rg}\ (A - 2I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée, de rang 2.
Si $\lambda = 1$, on obtient

$$\mathrm{rg}\ (A - I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

On en déduit :
$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2\},\ \mathrm{rg}\ (A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\ (f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}) = 3 \\ \text{Si } \lambda \in \{-1,1,2\},\ \mathrm{rg}\ (A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\ (f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}) = 2. \end{array}}$

2. L'endomorphisme $f + Id_{\mathbb{R}^3}$ a pour matrice dans la base canonique :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons $\ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})$:
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}) &\iff \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ -2x + 2y + 6z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y - x + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = \{(z, -2z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1, -2, 1))$. On pose $\mathcal{B}_1 = ((1, -2, 1))$. Par définition, $\mathcal{B}_1$ est une famille génératrice de $\ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})$. Cette famille est libre car constituée d'un seul vecteur non-nul.
$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{B}_1 = ((1,-2,1)) \text{ est une base de } \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}).}$

3. On montre de même que $\boxed{\mathcal{B}_2 = ((0,1,0)) \text{ est une base de } \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}).}$

4. On montre de même que $\boxed{\mathcal{B}_3 = ((1,-2,0)) \text{ est une base de } \ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^3}).}$

5. On pose $\mathcal{C} = ((1,-2,1),(0,1,0),(1,-2,0))$.
Montrons que $\mathcal{C}$ est libre.
Résolvons : (S) : $x(1,-2,1) + y(0,1,0) + z(1,-2,0) = (0,0,0)$, d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ -2x+y-2z=0 \\ x=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$$

On en déduit que la famille $(\mathcal{C})$ est libre.
De plus, c'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est un espace vectoriel de dimension 3.
$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

6. (a) $u \in \ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$ donc $(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Or $(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})(u) = f(u) - \lambda u$. D'où $\boxed{f(u) = \lambda u.}$
   (b) On déduit de la question précédente :
   puisque $\varepsilon_1 \in \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})$, $\boxed{f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1}$
   puisque $\varepsilon_2 \in \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$, $\boxed{f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2}$
   puisque $\varepsilon_3 \in \ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})$, $\boxed{f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3}$.

7. On déduit de la question précédente :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

8. Relation matricielle entre A et D.

   (a) Par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})$ est la matrice des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs ε_1, ε_2, ε_3. D'où :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

   (b) L'endomorphisme $Id_{\mathbb{R}^3}$ est bijectif : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Dnc sa matrice dans toutes bases est inversible. On en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible.}}$.
   De plus, puisque la bijection réciproque de $Id_{\mathbb{R}^3}$ est $Id_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})$.
   $\boxed{\text{Donc } P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3}).}$ Après calculs, on obtient :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

   (c) On a : $f = Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^3}$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})$.
   On en déduit $\boxed{D = P^{-1}AP.}$

Exercice 3.