BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°7

Samedi 1er juin 2024

– Espaces vectoriels et applications linéaires –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter. **Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.** N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 – Informatique.

Voici quelques fonctions de la bibliothèque `random` :

`randint(a,b)`	pioche un entier aléatoire dans l'ensemble $[\![a,b]\!]$ **Attention**, pour une fois l'intervalle inclut la borne supérieure.
`random()`	pioche un réel au hasard dans l'intervalle $[0,1[$

1. Ecrire un programme `Bernoulli` qui prend en entrée un paramètre $p \in]0,1[$ et qui renvoie une réalisation d'une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. Ecrire un programme `binomiale` qui prend en entrée un paramètre $p \in]0,1[$ et un paramètre n et qui renvoie une réalisation d'une loi binomiale de paramètres n et p.
3. Ecrire une fonction `Jeu()` qui ne prend aucun paramètre en entrée et qui simule le jeu suivant :
on choisit un nombre au hasard entre 0 et 20. Si ce nombre est supérieur ou égal à 17, le jeu s'arrête.
Sinon, on choisit un autre nombre.
On recommence jusqu'à obtenir un nombre supérieur ou égal à 17.

Exercice 2 – Lien entre le noyau et l'image.

Dans cet exercice, on notera (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Expliciter f.
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$. On notera $\mathscr{B}$ la base obtenue.
3. f est-elle injective ? Sans calcul, peut-on savoir si f est surjective ? Justifier.
4. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} f$.
5. Montrer que $\operatorname{Im} f = \ker f$ (on pourra appliquer le théorème du rang). Que vaut $f^2 (= f \circ f)$?
6. Montrer que la famille $\mathscr{C}$, obtenue comme juxtaposition de la famille $\mathscr{B}$ et des vecteurs e_3 et e_4 de la base canonique (famille "$\mathscr{C} = \mathscr{B} \cup (e_3, e_4)$" ou "$\mathscr{C} = (\mathscr{B}, e_3, e_4)$"), est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ (comme base de départ **et** d'arrivée).
8. **Retour sur la question 5** : plus généralement, soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que si $\operatorname{Im} f = \ker f$, alors $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (cette notation désigne l'application linéaire nulle).
Que pensez-vous de la réciproque de ce résultat ?

Tournez si'l vous plait.

Exercice 3 – Diagonaliser une matrice.

Notations :

- on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$;
- on note I_3 la matrice identité d'ordre 3, et $\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- si g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2}(g)$ la matrice de g par rapport aux bases $\mathscr{D}_1$ (au départ) et $\mathscr{D}_2$ (à l'arrivée).
- si g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(g)$ la matrice de g par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer, en fonction du réel λ, le rang de la matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3$ (On pourra commencer par montrer que le rang de cette matrice est le rang d'une matrice triangulaire supérieur, par de simples échanges de lignes ou de colonnes).
   En déduire le rang de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3}$.
2. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f + \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$ et déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\ker(f + \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$.
3. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f - \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$ et déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $\ker(f - \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$.
4. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f - 2\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$ et déterminer une base $\mathscr{B}_3$ de $\ker(f - 2\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$.
5. Montrer que la famille obtenue par juxtaposition des familles $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ (famille "$\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$") est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On la notera $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Soit $u \in \ker(f - \lambda \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$.
   (a) Déterminer une expression très simple de $f(u)$ en fonction de u.
   (b) En déduire $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$ et $f(\varepsilon_3)$ en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3.
7. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ (au départ et à l'arrivée). On notera D cette matrice.
8. Relation matricielle entre A et D.
   (a) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}(\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$. On notera P cette matrice.
   (b) Justifier que P est inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3})$ et calculer P^{-1}.
   (c) En écrivant $f = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ \mathrm{I}d_{\mathbb{R}^3}$ et en écrivant la relation matricielle correspondante dans des bases bien choisies, montrer que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.