Prénom :
Nom :

Interrogation n°22 : Intégration sur un segment

1 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue et positive sur $[a, b]$. Donner la définition de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
(Un dessin sera apprécié)

1 2. Citer la formule permettant de calculer une intégrale à l'aide d'une primitive. Définissez correctement les fonctions.

1 3. Citer le théorème de l'intégration par parties.

2 4. Citer les propriétés de l'intégrale sur $[0, 1]$.

5. **Exercices**

2 (a) En vous aidant du changement de variable $u = \ln(t)$, calculer $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t$.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln^n(t)\mathrm{d}t$.

1 i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n existe.

2 ii. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive.

5) a) $u = \ln(t)$. donc $du = \frac{1}{t} dt = e^{-u} dt$.

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln t)}{t} dt = \int_1^2 \frac{\ln(u)}{e^u} \cdot e^u du = \int_1^2 \ln(u) du.$$

$$= \left[x\ln(x) - x\right]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1$$

$$= 2\ln(2) - 1.$$

b) i Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto t^2 \ln(t)^n$ est continue sur $[1, e]$ donc I_n existe.

ii. $\forall t \in [1, e]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t^2(\ln(t))^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e t^2(\ln(t))^n \left[\ln(t) - 1\right] dt.$$

Or, $\forall t \in [1, e]$, $t^2(\ln(t))^n \geq 0$ et $\ln(t) - 1 \leq 0$

donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

La suite est décroissante.