Exercice 1 Déterminer les lignes de niveau (et les tracer) de :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$$

Exercice 2 Pour les fonctions suivantes, donner leur ensemble de définition et montrer qu'elles ne sont pas continues en $(0,0)$.

1. Soit f définie par $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$
2. Soit f définie par $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$

Exercice 3 On admet que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition (à préciser). Déterminer leurs dérivées partielles :

1. $f : (x,y) \mapsto 3x^2x + 2x\sin(x-2y)$
2. $g : (x,y) \mapsto \dfrac{2x^3}{x+y} + 3y$
3. $h : (x,y) \mapsto y\ln(2-x)$

Exercice 4 Déterminer les extrema de :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-2x-4y+6 \end{array} \right.$$

Exercice 5 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

1. Déterminer les dérivées partielles de f.
2. Donner la définition d'un minimum (ou maximum) local.
3. Montrer que f ne peut admettre un extremum qu'en un seul point.
4. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2)$. f admet-elle un extremum local ?

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{U} = (u,v)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Soit $g : t \mapsto f((a,b) + t\vec{U})$ (donc $g : t \mapsto f(a+tu, b+tv)$).
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide du gradient de f (on pourra utiliser une formule du cours).

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + y \end{array} \right.$$