

---

## 3 septembre 2024 : Calculs et Récurrence

---

### 1 Calculs.

Feuilles 1, 2, 4, 6, 7 et 10 du cahier de calculs.

### 2 Récurrence.

#### 2.1 Principe.

**Théorème 1.**

Soit  $P$  une proposition mathématique définie sur  $\mathbb{N}$ . Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- il existe un entier  $n_0$  tel que  $P(n_0)$  est vraie.
- pour tous les entiers  $n \geq n_0$ , si  $P(n)$  est vraie alors  $P(n+1)$  est vraie aussi.

Alors, la propriété  $P(n)$  est vraie pour tous les entiers.

#### 2.2 Exercices.

**Exercice 1.** *Suite arithmético-géométrique.*

On considère une suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = 5u_n + 8$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 3 \times 5^n - 2$ .

**Exercice 2.**

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$ .

Démontrer que, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = \frac{1}{n+1}$ .

**Exercice 3.**

Montrer, par récurrence, que pour tout entier  $n$ , 4 divise  $5^n - 1$ .

**Exercice 4.**

Montrer, par récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $10^n - 1$  est un multiple de 9.

**Exercice 5.**

Montrer, par récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .