Chapitre 1 : Logique et raisonnements

(prof)

Table des matières

1 Rudiments de logiques.

1.1 Assertions mathématiques.

Définition 1.

On appelle assertion mathématique un énoncé portant sur les propriétés de certains objets mathématiques.
Elle peut être vraie ou fausse.

Exemple 2.

- Le nombre 3 est pair.
- il existe un nombre réel x tel que $x^2 = -1$.

Définition 3.

On appelle conjecture une assertion mathématique dont on soupçonne la véracité mais qui n'a pas été démontrée.

Exemple 4. La conjecture de Syracuse, étudiée en informatique, n'est pas encore démontrée.

1.2 Connecteurs logiques.

Définition 5.

Soit A une assertion mathématique.
La négation de A, notée NON A, est l'assertion qui prend toujours la valeur contraire à celle de A.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	NON A
V	F
F	V

Exemple 6.

1. La négation de **tous les frères de Paul sont blonds** est
   Au moins un des frères de Paul n'est pas blond.
2. La négation de **chaque élève a au moins lu un des livres au programme** est
   Au moins un des élèves de la classe n'a lu aucun livre au programme.

Théorème 7.

Soit A une assertion mathématique.

$$\mathrm{NON}(\mathrm{NON}A) = A$$

Démonstration : On va faire les tables de vérités.

A	NONA	NON(NONA)
V	F	V
F	V	F

■

Définition 8.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
L'assertion A ET B est vraie seulement lorsque A et B sont vraies.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	A ET B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition 9.

Soient A et B deux assertions.
L'assertion A OU B est vraie dès que A ou B est vraie.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	A OU B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 10. Pour A= « 3 est pair » et B= « 6 est pair » , la proposition A OU B est vraie.

Théorème 11.

Soient A et B deux assertions mathématiques. On a les liens logiques suivants :

1. A ET $A = A$
2. A ET $B = B$ ET A *Commutativité de et*
3. A OU $A = A$
4. A OU $B = B$ OU A *Commutativité de ou*
5. A ET (NON A) est toujours fausse.
6. A OU (NON A) est toujours vraie.
7. NON (A ET B) = (NON A) OU (NON B). *Négation de ET*
8. NON (A OU B) = (NON A) ET (NON B). *Négation de OU*

Exemple 12. La négation de la proposition **Sophie a 3 frères et 2 sœurs** est
Sophie n'a pas 3 frères ou n'a pas 2 sœurs.

Théorème 13.

Soient A,B et C trois assertions mathématiques. On a les liens logiques suivants :

1. A OU (B OU C)=(A OU B) OU C = A OU B OU C *Associativité de OU*
2. A ET (B ET C)=(A ET B) ET C = A ET B ET C *Associativité de ET*
3. A OU (B ET C)=(A OU B) ET (A OU C) *Distributivité de OU sur ET*
4. A ET (B OU C)=(A ET B) OU (A ET C) *Distributivité de ET sur OU*

1.3 Implications et équivalences.

Définition 14.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
L'assertion A implique B, notée $A \Rightarrow B$, signifie que

- Si A est vraie alors B aussi.
- Si A est fausse alors on ne peut rien dire sur B.

La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 15. Notons A : « x est un multiple de 6 » et B : « x est un multiple de 2 ».
Alors, $A \Rightarrow B$ est vraie. En revanche, la proposition $B \Rightarrow A$ est fausse.

Remarque 16. Si $A \Rightarrow B$ est vraie, cela ne veut pas dire que A est **tout le temps** vrai.

Exemple 17. Quand je dis, "s'il fait beau dehors alors je mets mes lunettes de soleil", quel temps fait-il dehors ?

Définition 18.

Soient A et B deux propositions.
La réciproque de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$.

Exemple 19. La réciproque de « Si n est un multiple de 6 alors n est un multiple de 2 » est
« Si n est un multiple de 2 alors n est un multiple de 6 ».

Définition 20.

Soient A et B deux assertions.
La contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication NON $B \Rightarrow$ NON A.

Exemple 21. La contraposée de « Si n est un multiple de 6 alors n est un multiple de 2 » est la proposition
« Si n n'est pas un multiple de 2 alors n n'est pas un multiple de 6 ».

Théorème 22.

Soient A et B deux assertions.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ ne sont pas toujours vraies en même temps.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée NON$B \Rightarrow$ NON A sont toujours vraies en même temps.

Définition 23.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
La proposition A est équivalente à B, notée $A \Leftrightarrow B$, est la proposition définie par $(A \Rightarrow B)$ ET $(B \Rightarrow A)$.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 24. Pour trois réels positifs a, b et c, un triangle de côtés de longueur a, b et c est rectangle si, et seulement si, $a^2 + b^2 = c^2$.

2 Quantificateurs.

2.1 Définitions.

Définition 25.

Le quantificateur $\in$ traduit l'appartenance d'un élément à un ensemble.
Le quantificateur $\notin$ traduit la non appartenance d'un élément à un ensemble.

Définition 26.

Le quantificateur universel $\forall$ signifie pour tout.

Exemple 27. La proposition « Tous les carrés de nombres réels sont positifs » s'écrit avec les quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \; x^2 \geq 0.$$

Définition 28.

Le quantificateur existentiel $\exists$ signifie il existe au moins un élément tel que ...

Exemple 29. La proposition « Il existe un réel dont le carré vaut $\sqrt{2}$ » s'écrit avec les quantificateurs

$$\exists \, x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = \sqrt{2}.$$

Exemple 30. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comment traduire n **est impair** ?

$$\text{il existe } \; k \in \mathbb{N} \; \text{ tel que } \; n = 2k + 1$$

Définition 31.

Le quantificateur $\exists!$ signifie il existe exactement un élément tel que ...

Exemple 32. La proposition « Il existe un unique réel dont le double vaut la moitié » s'écrit avec les quantificateurs

$$\exists!\ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x = \frac{x}{2}.$$

Exemple 33. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

- $\forall\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$
  $2^2 = 4$ donc la proposition est fausse.
- $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$
  $(-1)^2 = 1$ donc la proposition est vraie.
- $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$
  $(-1)^2 = 1^2 = 1$ donc la proposition est fausse.

2.2 Ordre des quantificateurs.

Exemple 34. Comment traduire **Tous les points de E ont un antécédent par f dans A** ?

$$\forall y \in E,\ \exists x \in A \ \text{ tel que } y = f(x)$$

Remarque 35. L'ordre des quantificateurs est **très** important.
Dans chacune des phrases suivantes, combien y a-t-il de lits ?

- Tous les ours ont un lit.
- C'est le même lit pour tous les ours.

Exemple 36. Comparer les propositions suivantes.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$
  A chaque x correspond un y.
- $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$
  C'est le même y pour tous les x.

Théorème 37.

Lorsqu'on utilise plusieurs fois le même quantificateur, on peut inverser l'ordre.
Lorsqu'on utilise des quantificateurs différents, on ne peut pas inverser l'ordre.

Exemple 38. On peut écrire « $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \ldots$ » ou bien « $\forall b \in B,\ \forall a \in A,\ \ldots$ »

2.3 Quantificateurs et opérations logiques.

Théorème 39.

Soit $A(x)$ une proposition portant sur un réel x.

1. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que NON $A(x)$ ».
2. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $A(x)$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},$ NON $A(x)$ ».

Théorème 40.

Soient $A(x, y)$ une proposition portant sur deux réels x et y.
La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $A(x, y)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R},$ NON $A(x, y)$ ».

2.4 Démontrer une proposition qui commence par $\forall$.

On doit démontrer que pour tous les éléments d'un ensemble la propriété est vraie.

- Démonstration générale.
  On choisit un élément de E sans aucune autre contrainte : soit $x \in E$ fixé quelconque.
  On montre qu'il vérifie la propriété. C'est le même argument pour tous les éléments de E.
- Partition de E.
  On découpe l'ensemble E en plusieurs sous-ensembles : E_1, E_2, ...
  On montre que la propriété est vraie en utilisant un argument différent pour chaque partie de E.

Exemple 41. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.

2.5 Démontrer une proposition qui commence par $\exists$.

On doit justifier l'existence d'un élément qui vérifie la propriété souhaitée.

- Construction de l'élément.
  Par un raisonnement d'analyse-synthèse (voir TD), on construit un élément qui convient.
- Utilisation de théorème.
  On applique un théorème du cours dont la conclusion est l'existence d'un élément qui convient.

Exemple 42. Justifier qu'il existe un réel x tel que $x^3 = 1 - x$.

3 Différents modes de raisonnement.

3.1 Raisonnement par récurrence.

Il s'agit d'un raisonnement qui convient pour démontrer que propositions de la forme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n).$$
$$\forall n \geq n_0,\ P(n).$$

Théorème 43.

Soit P une assertion définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie.
- $\forall\, n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors, la propriété P est vraie sur $\mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie.

Exemple 44. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$: "$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$"

I Pour $n = 1$: $1 + 2 + \cdots + 1 = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
Donc, $P(n+1)$ est vraie.

C D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 45. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 10^n - 1$ est un multiple de 9.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$: "$10^n - 1$ est un multiple de 9".

- **I** Pour $n = 0$: $10^0 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 9 donc $P(0)$ est vraie.
- **H** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
  $10^{n+1} - 1 = 10^{n+1} - 10 + 10 - 1 = 10(10^n - 1) + 9.$

  Par somme de multiple de 9, $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9.
  Donc, $P(n+1)$ est vraie.
- **C** D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 10^n - 1$ est un multiple de 9.

Remarque 46. Il se peut que $P(n)$ ne suffise pas pour obtenir $P(n+1)$. On fait alors une **récurrence double**.

Théorème 47.

Soient P une assertion définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
- $\forall\, n \geq n_0,\ P(n)$ ET $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$

Alors, la propriété P est vraie sur tout $\mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.

Exemple 48. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: "$u_n = 3^n - 2^{n+1}$".

- **I** Pour $n = 0$: $u_0 = -1$ et $3^0 - 2 = -1$ donc $P(0)$ est vraie.
  Pour $n = 1$: $u_1 = -1$ et $3^1 - 2^2 = -1$ donc $P(1)$ est vraie.
- **H** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \underset{\text{HDR}}{=} 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1}) = 5.3^{n+1} - 5.2^{n+2} - 3.3^{n+1} - 3.2^{n+2}$
  $== 3^{n+1}.3 - 2^{n+2}.2 = 3^{n+2} - 2^{n+3}.$
  Donc, $P(n+2)$ est vraie.
- **C** D'après le principe de récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

3.2 Démontrer une implication.

Methode 1.

Pour démontrer une implication de la forme $A \Rightarrow B$,

- On suppose que l'assertion A est vraie
- On montrer qu'elle implique A_1, qui implique A_2, ...
- on arrive à l'assertion B

Exemple 49. Démontrer que Si 6 divise n alors n est pair.

Soit n un entier divisible par 6.
donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$.
donc il existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2\tilde{k}$.
Donc, n est pair.

Théorème 50.

Soient A et B deux assertions.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée NON$B \Rightarrow$ NONA sont équivalentes.

Exemple 51. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ pair $\Rightarrow n$ pair .

On va raisonner par contraposée. Soit n un entier impair.
Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$.
Donc il existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2\tilde{k}+1$.
Donc, n^2 est impair.
Par contraposée, on a le résultat souhaité.

3.3 Démontrer une équivalence.

Methode 2.

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$,

- on montre une double implication $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
- on montre que A est équivalente à A_1, qui est équivalente à A_2, $\dots$, qui est équivalente à B.

Exemple 52. Démontrer qu'un produit de deux entiers est impair si, et seulement si, les deux entiers sont impairs.

On va raisonner par double implication.

$\Leftarrow$ Soient a et b deux entiers impairs.
Donc il existe $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 2k+1$ et $b = 2k'+1$.
Donc il existe $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ tel que $ab = (2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2(k+k') + 1$.
Donc il existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tel que $ab = 2\tilde{k}+1$.
Donc, ab est impair.

$\Leftarrow$ On va raisonner par contraposée. Soient a et b deux entiers pairs.
Donc il existe $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 2k$ et $b = 2k'$.
Donc il existe $(k,k') \in \mathbb{N}^2$ tel que $ab = (2)(2k') = 4kk'$.
Donc il existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tel que $ab = 2\tilde{k}$.
Donc, ab est pair.

Par double implication, on a l'équivalence.

3.4 Trouver un contre-exemple.

Lorsqu'on veut démontrer qu'une assertion de la forme "$\forall x \in E, \dots$" est fausse, on utilise un contre-exemple.

Exemple 53. On s'intéresse à la proposition suivante :
Tout entier naturel non nul est la somme de trois carrés d'entiers naturels.

1. Traduire cet énoncé avec des quantificateurs.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \ \text{ tel que } \ n = a^2+b^2+c^2$$

2. Démontrer qu'il est faux.

   On va montrer que 7 ne s'écrit pas comme la somme de trois carrés d'entiers.
   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$. Alors, $a^2, b^2, c^2 \in \{1,2,4,\dots\}$.
   Or, $1+1+1 \neq 7$, $1+1+2 \neq 7$, $1+2+2 \neq 7$, $2+2+2 \neq 7$ et $2+2+4 \neq 7$.
   On a trouvé un contre-exemple donc la propriété est fausse.

3.5 Démonstration par l'absurde.

On suppose qu'une certaine propriété est fausse et on arrive à une contradiction.
On en déduit que la proposition initiale est vraie.

Exemple 54. Démontrer, par l'absurde, que 0 n'a pas d'inverse.

On raisonne par l'absurde en supposant que 0 est inversible.
Il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $a \times 0 = 1$.
Donc $0 = 1$.
C'est absurde donc l'hypothèse est fausse.
Donc, 0 n'a pas d'inverse.