Exercice 1. Traduire mathématiquement les phrases suivantes.

1. Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.
2. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 1.
3. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.
4. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.
5. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
6. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Ecrire les négations des propositions suivantes.

1. $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \leq N.$
2. $\exists!\, x \in \mathbb{R},\ x = x^2.$

Exercice 3. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1.$

Exercice 4. Démontrer les deux résultats suivants.

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \exists\, z \in \mathbb{R} / z > x + y.$
2. $\exists!\, x \in \mathbb{R}_+ \ /\ x^2 = 1$

Exercice 5. Démontrer les résultats suivants.

1. Pour tout entier naturel n non nul, 6 divise $5n^3 + n$.
2. Montrer que la propriété "8 divise $9^n + 1$" est héréditaire.
   Conclure.

Exercice 6. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$u_0 = 3,\ \ u_1 = 7\ \ \forall n \geq 2,\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$$

Démontrer, à l'aide d'une **récurrence double**, que
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

Exercice 8. [**] Démontrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

Exercice 9. [**] Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 10. [**] Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 11. [**] Existe-t-il un réel x tel que $x = \sqrt{x} + 6$?

Exercice 12. [**] Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -2,\quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$