Devoir maison n°1
— Calculs sur les nombres réels, logique, récurrences —

BCPST
1.1 & 1.2

Exercice 1 - Calculs.

1. Simplifier : $\dfrac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}$
2. Simplifier : $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}$.
3. Simplifier : $\dfrac{(3^2\times(-2)^4)^8}{((-3)^5\times 2^3)^{-2}}$.
4. Résoudre $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$
5. (a) Résoudre l'équation $x^2-3\sqrt{3}x+3=0$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $\sin^2(x)-3\sqrt{3}\sin(x)+3=0$.
6. (a) Montrer que $3-2\sqrt{2}>0$
   (b) Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.
   (c) En déduire les solutions réelles de l'équation $\dfrac{1}{4}x^2+2x+2\sqrt{2}+1=0$.
   On donnera les solutions sous la forme la plus simple possible.

Exercice 2 - Avec des quantificateurs.

Exprimer avec des quantificateurs les propositions suivantes.

1. (a) Tout entier est le carré d'un entier.
   (b) Tout entier a pour carré la somme de deux carrés d'entiers.
   (c) Certains entiers ont pour carré la somme de deux carrés d'entiers.
   (d) Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
   (b) L'équation $f(x)=0$ a exactement une solution sur $\mathbb{R}$.
   (c) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
   (d) La fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 - Suite de Fibonacci.

Suite de Fibonacci. La suite de Fibonacci (mathématicien italien également connu sous le nom de Léonard de Pise, 1170-1250) est la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0=0, \\ u_1=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n. \end{cases}$$

1. Calculer les 9 premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite de Fibonacci est à valeurs entières strictement positives à l'exception du premier terme (on pourra raisonner par récurrence sur $\mathbb{N}^*$).
3. Soient r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation du second degré :
$$x^2 - x - 1 = 0,$$
r_1 étant la plus grande. Expliciter r_1 et r_2.
4. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(r_1^n - r_2^n\right).$$
5. Déterminer un encadrement de $\sqrt{5}$ entre deux entiers. En déduire que $-1 < r_2 < 0 < 1 < r_1$ puis que $\left|\frac{r_2}{r_1}\right| < 1$.
6. Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a t-elle une limite et, si oui, quelle est-elle ? Aucune démonstration n'est attendue. On distinguera plusieurs cas suivant que $q \leqslant -1$, $-1 < q < 1$, $q = 1$ et $q > 1$.
7. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
8. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
9. quelle est la limite de v_n ? (on pourra transformer l'expression de v_n en factorisant au numérateur par r_1^{n+1} et au dénominateur par r_1^n).
   Ce nombre est le nombre d'or, en donner la valeur exacte.