Corrigé du devoir maison n° 1

— —

Exercice 1 - Calculs.

1. $\dfrac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} = \dfrac{(1+\sqrt{7})^2}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})} = \dfrac{1+2\sqrt{7}+7}{1-7} = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{-6} = \boxed{\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}}$.

2. $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1}\times (2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{3^{-3}\times 2^4}{3^{-4}\times 2^4} = 3^{-3-(-4)} = \boxed{3}$.

3. $\dfrac{(3^2\times(-2)^4)^8}{((-3)^5\times 2^3)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\times 2^{32}}{3^{-10}\times 2^{-6}} = \boxed{3^{26}\times 2^{38}}$.

4. $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.
   L'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{3}, \frac{-\pi+6k\pi}{3} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

5. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé quelconque.
   On pose $X = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
2\sin^2(x) - 3\sqrt{3}\sin(x) + 3 = 0 &\iff 2X^2 - 3\sqrt{3}X + 3 = 0 \text{ équation du 2d degré de discriminant } \Delta = 3 > 0\\
&\iff X = \sqrt{3} \text{ ou } X = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \underbrace{\sin(x) = \sqrt{3}}_{\text{impossible car } \sqrt{3}>1} \quad \text{ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

6. (a) $0<8<9 \Rightarrow 0<\sqrt{8}<\sqrt{9} \Rightarrow 0 < 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow \boxed{3-2\sqrt{2}>0}$.
   (b) Ce sont deux réels positifs. On va comparer leurs carrés.
   Puisque $3-2\sqrt{2}>0$ alors $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$.
   Par identité remarquable, $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$.
   Par passage à la racine carré, $\boxed{\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1}$.
   (c) C'est une équation de second degré. On calcule le discriminant.
   $\Delta = 4 - 4\times\dfrac{1}{4}\times(2\sqrt{2}+1) = 3-2\sqrt{2} > 0$.
   Il y a donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\frac{2}{4}} = 2(-2+\sqrt{2}-1) = \boxed{-6+2\sqrt{2}}$ et
   $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\frac{2}{4}} = 2(-2-\sqrt{2}+1) = \boxed{-2-2\sqrt{2}}$.
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{-6+2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2}\right\}}$.

Exercice 2.

1. (a) $\forall n\in\mathbb{Z},\ \exists\, m\in\mathbb{Z}\ /\ m^2 = n$.
   (b) $\forall n\in\mathbb{Z},\ \exists\, a\in\mathbb{Z},\ \exists\, b\in\mathbb{Z}\ /\ m^2 = a^2+b^2$.
   (c) $\exists\, n\in\mathbb{Z},\ \exists\, a\in\mathbb{Z},\ \exists\, b\in\mathbb{Z}\ /\ m^2 = a^2+b^2$.

(d) $\neg(\exists\, n \in \mathbb{N} \;/\; \forall m \in \mathbb{Z},\ n \geq m) = \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n < m$.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$.

   (b) $\exists!\ x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = 0$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y)$.

   (d) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x_0)$.

Exercice 3.

1. $\boxed{u_0 = 0\ ,\ u_1 = 1\ ,\ u_2 = 1\ ,\ u_3 = 2\ ,\ u_4 = 3\ ,\ u_5 = 5\ ,\ u_6 = 8\ ,\ u_7 = 13\ ,\ u_8 = 21}$.

2. Montrons par récurrence que les termes de la suite sont à valeurs entières strictement positives, excepté le premier terme.
   - Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définissons la propriété : $\mathcal{P}(n)$ «$u_n \in \mathbb{N}^*$ ».
   - $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies car $u_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $u_2 = u_0 + u_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.
     On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n \in \mathbb{N}^*$ et d'après $\mathcal{P}(n+1)$, $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$, donc leur somme est aussi un nombre entier strictement positif. On en déduit que $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$. Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On en déduit que les termes de la suite sont à valeurs entières strictement positives, excepté le premier terme (qui est nul).

3. Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$.
   Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux racines réelles r_1 et r_2 :

$$\boxed{r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

   (r_1 est bien la plus grande des deux.)

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la propriété : $\mathcal{P}(n)$ «$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$».
   - (I) : $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^0 - r_2^0) = 0$ et $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie .
     $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(r_1^1 - r_2^1) = 1$ et $u_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - (H) : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.
     On a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on peut remplacer u_n et u_{n+1} par leurs expressions en fonction de r_1, r_2 et n. D'où

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+1} + r_1^n - (r_2^{n+1} + r_2^n)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((1+r_1)r_1^n - (1+r_2)r_2^n), \end{aligned}$$

     or r_1 et r_2 étant racines de l'équation : $z^2 - z - 1 = 0$, elles vérifient $r_1 + 1 = r_1^2$ et $r_2 + 1 = r_2^2$, d'où :

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}),$$

     on en déduit que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- ▶ Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n).$$

5. $4 < 5 < 9$ donc, en appliquant la fonction $\sqrt{\ }$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$.
   D'où $\boxed{2 < \sqrt{5} < 3}$.
   Donc $1 < \dfrac{1+2}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Et $-3 < -\sqrt{5} < -2$ donc $\dfrac{1-3}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1-2}{2} < 0$.
   On en déduit : $\boxed{-1 < r_2 < 0 < 1 < r_1}$.
   D'après les signes de $r_1 (> 0)$ et de $r_2 (< 0)$, $\left|\dfrac{r_2}{r_1}\right| = \dfrac{-r_2}{r_1}$.
   Or $0 < -r_2 < 1 < r_1$ donc en divisant par $r_1 > 0$, on obtient $0 < \dfrac{-r_2}{r_1} < 1$, d'où $\boxed{\left|\dfrac{r_2}{r_1}\right| < 1}$.
6. — Si $q < -1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone, pas bornée et n'a pas de limite.
   — Si $q = -1$, elle n'est pas monotone, n'a pas de limite mais est bornée entre -1 et 1
   — Si $-1 < q < 0$, elle n'est pas monotone, est bornée entre q et 1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
   — Si $0 \leqslant q < 1$, elle est décroissante, bornée entre 0 et 1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
   — Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$
   — Enfin, si $q > 1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$,
7. $-1 < r_2 < 0$ et $r_1 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} r_2^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_1^n = +\infty$, et par somme $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty}$.
8. La suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie car (d'après la question 2) pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$.

9. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, on ne peut pas exprimer la limite de la suite en fonction de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Transformons l'expression :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1^n - r_2^n},$$

   Factorisons le numérateur par r_1^{n+1} et le dénominateur par r_1^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r_1^{n+1}\left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}\right)}{r_1^n\left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right)} = r_1 \frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}},$$

   Or $\left|\dfrac{r_2}{r_1}\right| < 1$. On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right) = 1$. d'où
   $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r_1.}$