

Exercice 1: Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. La fonction f est constante sur \mathbb{R} .

$$| \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k.$$

2. La fonction f n'est pas constante sur \mathbb{R} .

$$| \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1) \neq f(x_2).$$

3. Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.

$$| \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n.$$

4. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 1.

$$| \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x \geq 2.$$

5. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.

$$| \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1.$$

6. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.

$$| \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Leftrightarrow n > 2.$$

Exercice 2: Ecrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N$.

$$| \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N.$$

2. $\exists! x \in \mathbb{R}, x = x^2$.

$$| (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2) \vee (\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2, x_1 = x_1^2 \wedge x_2 = x_2^2).$$

Exercice 3: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

| C'est faux. Si on prend $x = 1$ et $y = 2$, on n'a pas $x + y^2 = 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

| C'est faux. Prenons $x = 2$. Si on suppose la proposition vraie, $\exists y \in \mathbb{R}, 2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = -1$.
C'est absurde.

3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

| C'est faux car la fonction $y \mapsto 1 - y^2$ n'est pas constante.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

| C'est vrai. Prenons $x = 1$ et $y = 0$.

Exercice 4: Démontrer les deux résultats suivants :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} / z > x + y$.

| Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Prenons $z = x + y + 1$.

2. $\exists! x \in \mathbb{R}_+ / x^2 = 1$

| On peut utiliser le fait que la fonction carré est une bijection de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ ou on démontre l'existence et l'unicité :

- $x = 1$ convient donc on a l'existence.

- Supposons qu'il en existe deux : $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $x_1^2 = x_2^2 = 1$.
 $\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$.
 Comme ils sont tous les deux positifs, on a $x_1 = x_2$ d'où l'unicité.

Exercice 5: Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 6 divise $5n^3 + n$.

On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : 6 \text{ divise } 5n^3 + n$$

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $5n^3 + n = 6$ donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$5(n+1)^3 + n + 1 = 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1 = 5n^3 + 15n^2 + 15n + 6 = 5n^3 + 15n(n+1) + 6$$

Or, 2 divise $n(n+1)$ donc 6 divise $15n(n+1)$.

Par somme, 6 divise $5(n+1)^3 + n + 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

2. Montrer que la propriété "8 divise $9^n + 1$ " est héréditaire.

Que peut-on en conclure ?

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $8 \mid 9^n + 1$.

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, 9^n + 1 = 8k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, 9^{n+1} + 1 = 9(8k - 1) + 1 = 8(9k - 1)$$

Donc la propriété est héréditaire. Pourtant, on ne pourra jamais l'initialiser...

Exercice 6: Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

On le fait par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- **Initialisation** : $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\stackrel{HDR}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

- **Conclusion** : Par le principe de récurrence, on a le résultat souhaité.

Exercice 7: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 7 \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$$

Démontrer, à l'aide d'une **récurrence double**, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + 3^n.$$

On utilise une récurrence double.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) : "u_n = 2^{n+1} + 3^n"$$

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $2^{0+1} + 3^0 = 2 + 1 = 3$ et $2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$.
Or, $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 6u_{n-1} \\ &= 5(2^{n+1} + 3^n) - 6(2^n + 3^{n-1}) \\ &= 2^n(10 - 6) + 3^{n-1}(15 - 6) \\ &= 2^{n+2} + 3^{n+1} \end{aligned}$$

- **Conclusion** : Par le principe de récurrence double,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 2^{n+1} + 3^n$$

Exercice 8: [**] Démontrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ à la fois pair et impair.

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2k_1 = 2k_2 + 1 \Rightarrow k_1 - k_2 = \frac{1}{2}.$$

C'est absurde.

Exercice 9: [**] Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

On raisonne par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers (on le note \mathbb{P}) soit fini.

Alors, $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Notons $N = \prod_{k=1}^n p_k + 1$. Soit N est premier, soit il ne l'est pas.

- Supposons N premier. Alors, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, N = p_i$. Or, $N > p_i$ donc c'est absurde.
- Supposons N non premier. Alors, $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i | N$.

Or, $p_i | \prod_{k=1}^n p_k$ donc, par somme, $p_i | 1$. C'est absurde.

Donc, l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 10: [**] Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

On raisonne par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, p = 2k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, q^2 = 2k^2 \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \tilde{k} \in \mathbb{Z}, p = 2k \text{ et } q = 2\tilde{k} \\ &\Rightarrow \text{pgcd}(p, q) \neq 1 \end{aligned}$$

C'est absurde donc $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 11: [**] Existe-t-il un réel x tel que $x = \sqrt{x} + 6$?

On raisonne par analyse et synthèse.

- **Analyse :** Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{x} + 6$.
 $\Rightarrow \sqrt{x} = x - 6 \Rightarrow x = x^2 - 12x + 36 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$
 $x = 4$ ou $x = 9$
- **Synthèse :** On regarde ensuite si ces candidats conviennent :
 $\sqrt{4} + 6 \neq 4$ mais $\sqrt{9} + 6 = 9$ donc il existe bien un tel réel.

Exercice 12: [**] Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

On raisonne par analyse et synthèse.

- Analyse : On suppose que

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui convient.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, 1 = (a+b)x + 2a - b \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = 2a - b \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

- Synthèse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} = \frac{1/3(x+2) - 1/3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

On a bien trouvé un couple de réels qui convient.