Chapitre 3 : Ensembles (prof)

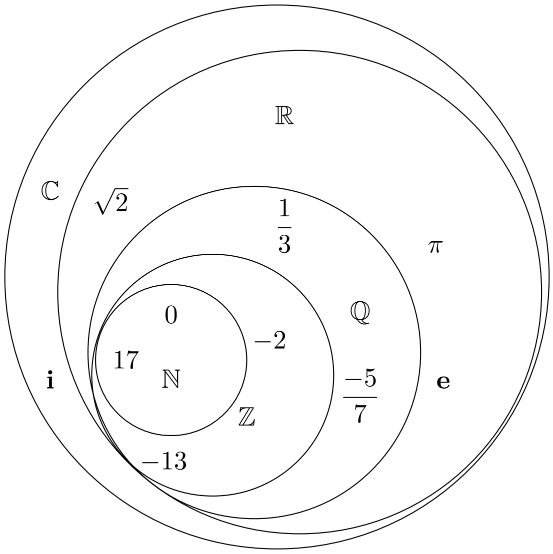
Table des matières

1 Définitions, appartenance, inclusion.

1.1 Les ensembles usuels.

Les ensembles usuels sont

- $\varnothing$, l'ensemble vide
- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels
- $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes



Soit E un ensemble.

- On note E^* lorsqu'on veut exclure 0.
- On note E_+ pour ne conserver que les éléments positifs.
- On note E_- pour ne conserver que les éléments négatifs.

1.2 Définitions d'un ensemble.

Définition 1.

Lorsqu'un ensemble E est défini en faisant la liste des objets mathématiques qu'il contient, on dit que l'on a défini cet ensemble par extension.

$$E = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Ces objets mathématiques sont appelés éléments de l'ensemble E.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément, on parle de singleton : $\{x_1\}$.

On dit que y appartient à E lorsque y est un des éléments de E.

$$y \in E \Leftrightarrow \exists\, i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } y = x_i$$

Exemple 2. $E = \{1, 7, 12, 85\}$ est défini par extension.

Définition 3.

Lorsqu'un ensemble E est défini par une propriété que vérifient les éléments d'un autre ensemble F, on dit que l'ensemble E est défini par compréhension.

$$E = \{x \in F \;\text{ tel que } P(x)\}$$

On dit que y appartient à E lorsque $P(y)$ est vraie.

$$y \in E \Leftrightarrow P(y) \text{ est vraie}$$

Exemple 4. Prenons $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x(x+2) = -12\}$. Il est défini par compréhension.
Donner sa définition par extension.

On résout l'équation $x^2 + 2x + 12 = 0$. Le discriminant est négatif donc il n'y a pas de solution donc $E = \varnothing$.

1.3 Inclusion

Définition 5.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F lorsque tous les éléments de E appartiennent à F. On note $E \subset F$ ou $F \supset E$.

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E\ ,\ x \in F$$

Remarque 6. Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on devra démontrer que tous les éléments de E sont inclus dans F.

1. Soit $x \in E$.
2. ...
3. donc $x \in F$.

Exemple 7. On note $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - y = 1\right\}$ et $F = \{(t+1, 2t+1), t \in \mathbb{R}\}$.

1. Donner deux éléments de chaque ensemble.

   $(0, -1) \in E$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \in E$.
   $(1, 1) \in F$ et $(0, -1) \in F$.
2. Montrer que $F \subset E$.
   Soit $a \in F$ fixé quelconque.
   Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $a = (t+1, 2t+1)$.
   Or, $2(t+1) - (2t+1) = 1$ donc $a \in E$.
   Donc $F \subset E$.

Remarque 8. Il faut bien distinguer les symboles $\in$ et $\subset$.

- $x \in E$: l'élément x appartient à l'ensemble E.
- $A \subset E$: l'ensemble A est inclus dans l'ensemble E.

Remarque 9. L'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.

Définition 10.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est égal à F lorsque E est inclus dans F et que F est inclus dans E.

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F) \text{ et } (F \subset E)$$

2 Parties d'un ensemble

2.1 Défintiion

Définition 11.

Soit E un ensemble. On appelle sous-ensemble ou partie de E tout ensemble inclus dans E.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble contenant toutes les parties de E.

Exemple 12. Faire la liste des parties de $E = \{0, 1\}$ puis de $F = \{0, 1, 2\}$.

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$\mathcal{P}(F) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Remarque 13. Une partie de E est *incluse* dans E mais elle *appartient* à l'ensemble des parties de E.

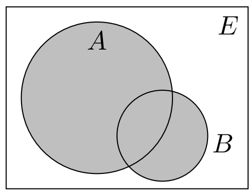
$$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

2.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 14.

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
On appelle union de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A \text{ ou } x \in B)\}$$



Théorème 15.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

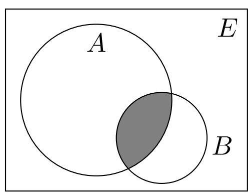
1. $A \cup \varnothing = A$. *existence d'un élément neutre.*
2. $A \cup E = E$.
3. $A \cup A = A$.
4. L'union est **commutative** : $A \cup B = B \cup A$.
5. L'union est **associative** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.

Remarque 16. L'union de deux ensembles est l'équivalent de l'opérateur logique OU.

Définition 17.

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble défini par

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } (x \in A \text{ et } x \in B)\}$$



Théorème 18.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E. Alors,

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cap E = A$.
3. $A \cap A = A$.
4. L'intersection est **commutative** : $A \cap B = B \cap A$.
5. L'intersection est **associative** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

Remarque 19. L'intersection de deux ensembles est l'équivalent de l'opérateur logique *ET*.

Théorème 20.

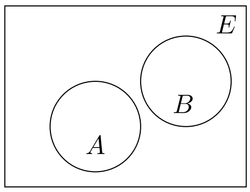
Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

1. L'intersection est **distributive** sur l'union : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. L'union est **distributive** sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition 21.

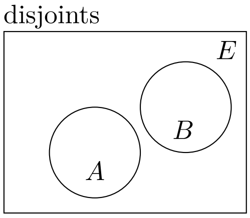
Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

On dit alors que l'union $A \cup B$ est une union disjointe et on la note $A \amalg B$.

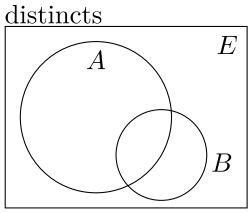


Remarque 22. Il ne faut pas confondre *disjoint* et *distinct*.

disjoints



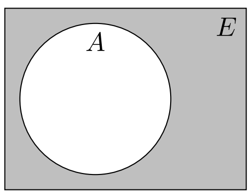
distincts



Définition 23.

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.
On appelle complémentaire de A dans E et on note $\overline{A}$ l'ensemble défini par

$$\overline{A} = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$$



Théorème 24.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

1. $\overline{\varnothing} = E$ et $\overline{E} = \varnothing$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

3 Produit cartésien, couples et $p-$uplets.

Définition 25.

Soient E et F deux ensembles.
On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble défini par

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E,\ y \in F\}$$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés des couples.

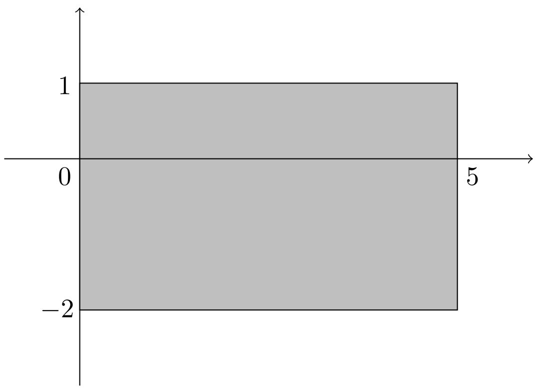
Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$.

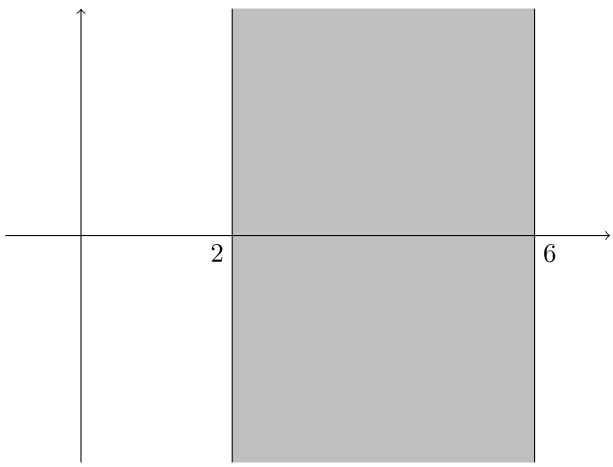
Exemple 26. Pour $E = \{a, 5\}$ et $F = \{3, b\}$, $E \times F = \{(a, 3), (a, b), (5, 3), (5, b)\}$.

Exemple 27. Proposer un élément de $\mathbb{N} \times [0, 1]$.

$(2, 0.5) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.

Exemple 28. Représenter $[0, 5] \times [-2, 1]$ et $[2, 6] \times \mathbb{R}$.





Définition 29.

Soit E un ensemble. Soit $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$.
On appelle $p-$uplet de E ou $p-$liste de E la donnée de p éléments de E dans un ordre précis.

On note E^p l'ensemble des $p-$uplets de E.

$$E^p = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ tel que } \forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in E\}$$

Exemple 30. (2,2,3,5) est un $4-$uplet de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarque 31. On imagine quatre tirages successifs avec remise dans l'ensemble E.

Remarque 32. L'ordre est très important. Si $a \neq b$ alors $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\} = \{b, a\}$.

4 Parties de $\mathbb{R}$.

4.1 Majorant, minorant.

Définition 33.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est minorée lorsqu'il existe un réel a plus petit que tous les éléments de A.

$$A \text{ minorée } : \ \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in A,\ a \leq x$$

On dit que a est un minorant de A.

On dit que A est majorée lorsqu'il existe un réel a plus grand que tous les éléments de A.

$$A \text{ majorée } : \ \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in A,\ a \geq x$$

On dit que a est un majorant de A.

On dit que A est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

$$A \text{ bornée } : \ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in A,\ a \leq x \leq b$$

Exemple 34.

- Les intervalles $[a, b]$ et $]a, b[$ sont bornés.
- L'intervalle $]a, +\infty[$ est minoré mais pas majoré.
- L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est minoré par 0 et majorée par 1 avec $0 \notin A$ et $1 \in A$.

4.2 Maximum, minimum

Définition 35.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A admet un plus petit élément (ou un minimum) lorsque :

$$\exists\ m \in A \text{ tel que } \forall x \in A,\ m \leq x.$$

On dit que A admet un plus grand élément (ou un maximum) lorsque :

$$\exists\ M \in A \text{ tel que } \forall x \in A,\ x \leq M.$$

Remarque 36. Un plus petit élément est un minorant, un plus grand élément est un majorant.

Théorème 37.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A admet un plus petit (resp. plus grand) élément alors il est unique et on le note $\min(A)$ (resp. $\max(A)$).

Démonstration : Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il y en a deux.
Soient a et b deux plus petits éléments de A.

$$\begin{aligned} \forall x \in A,\ a \leq x \quad &\Rightarrow \quad a \leq b \\ \forall x \in A,\ b \leq x \quad &\Rightarrow \quad b \leq a \end{aligned}$$

Par double inégalité, $a = b$ et le plus petit élément est bien unique. ■

Exemple 38.

- Pour l'intervalle $[a, b]$, a est le plus petit élément et donc un minorant.
- Pour l'intervalle $]a, b[$, b est un majorant mais pas le plus grand élément.
- Pour $A = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$, 0 est un minorant mais pas le plus petit élément et 1 est le plus grand élément donc un majorant.

4.3 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 39.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe, on appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A.
On le note $\sup(A)$.

Exemple 40. $\mathbb{Z}$ n'admet pas de borne supérieure.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{Z}$ admette une borne supérieure. C'est donc un majorant de $\mathbb{Z}$.
Or, $\mathbb{Z}$ n'est pas borné donc c'est absurde.

Théorème 41.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet une borne supérieure alors elle est unique.
2. Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et
$$\sup(A) = \max(A).$$

Démonstration : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A admet deux bornes supérieures, on les note A et B.
Ce sont toutes les deux les plus petits majorants donc $A \leq B$ et $B \leq A$.
Par double inégalité, $A = B$.
2. Puisque $\max(A)$ est un majorant de A alors $\sup(A) \leq \max(A)$.
Puisque $\max(A) \in A$ alors $\max(A) \leq \sup(A)$
Par double inégalité, $\sup(A) = \max(A)$. ■

Exemple 42. $\sup([1, 2]) = 2,\ \sup([1, 2[) = 2.$

Théorème 43 (Admis)**.**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

4.4 Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 44.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe, on appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A.
On le note $\inf(A)$.

Exemple 45. $\mathbb{Z}$ n'admet pas de borne inférieure.

Théorème 46.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet une borne inférieure alors elle est unique.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et

$$\inf(A) = \min(A).$$

Démonstration : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A admet deux bornes inférieures, on les note a et b.
   Ce sont toutes les deux les plus grands minorants donc $a \leq b$ et $b \leq a$.
   Par double inégalité, $a = b$.
2. Puisque $\inf(A)$ est un minorant de A alors $\min(A) \leq \inf(A)$.
   Puisque $\min(A) \in A$ alors $\inf(A) \leq \min(A)$
   Par double inégalité, $\inf(A) = \min(A)$. ■

Exemple 47. $\inf([1,2]) = 1$, $\inf(]1,2]) = 1$.

Théorème 48 (Admis)**.**

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.