Chapitre 4 : Etude de fonctions (prof)

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Ensemble de définition, graphe et asymptote d'une fonction

Définition 1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle domaine de définition de f le sous-espace de $\mathbb{R}$ pour lequel la fonction f est bien définie. On le note D_f.

On appelle graphe de f les points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, f(x))$.

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \text{ avec } x \in D_f\}$$

Exemple 2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 > 0\right\}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-1;1[$. Donc, $D_f =]-1,0[\cup]0,1[$.

1.2 Parité d'une fonction

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.

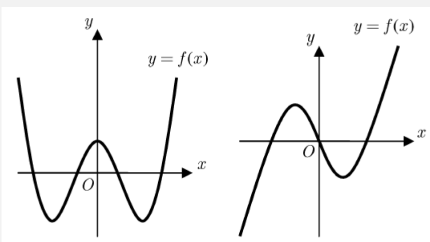
- La fonction f est paire lorsque $\forall x \in D_f,\quad f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est impaire lorsque $\forall x \in D_f,\quad f(-x) = -f(x)$.

Exemple 4. Etudier la parité de $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
On commence par l'ensemble de définition : $D_f =]-1,1[$.
Soit $x \in D_f$. $f(-x) = \dfrac{-x\sin(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \dfrac{x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$.
La fonction f est paire.

Théorème 5.

Soit f une fonction définie sur $D_f =]-a,a[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
2. Si f est impaire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.



Dans les deux cas, il suffit d'étudier f sur $[0,a[$.

Démonstration : 1. Supposons f paire. Soit $(x, f(x))$ un point du graphe de f.
Le symétrique de ce point par rapport à l'axe (Oy) est le point $(-x, f(x))$.
Or, f est paire donc $f(x) = f(-x)$.
Finalement, le symétrique de $(x, f(x))$ par rapport à (Oy) est $(-x, f(-x))$ et c'est bien un point du graphe de f.

2. Supposons f impaire. Soit $(x, f(x))$ un point du graphe de f.
Le symétrique de ce point par rapport à l'origine est le point $(-x, -f(x))$.
Or, f est impaire donc $f(-x) = -f(x)$.
Finalement, le symétrique de $(x, f(x))$ par rapport à l'origine est $(-x, f(-x))$ et c'est bien un point du graphe de f. ■

1.3 Périodicité d'une fonction

Définition 6.

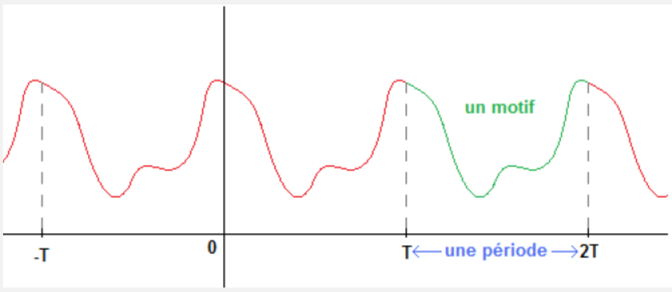
Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}^*$.
La fonction f est $T-$périodique lorsque que $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$. Le réel T est appelé une période de f.

Exemple 7. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

Exemple 8. Etudier la périodicité de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.
On commence par l'ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$.
Soit $x \in D_f$. $f(x+1) = x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = f(x)$.
La fonction f est $1-$périodique.

Théorème 9.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est $T-$périodique alors son graphe $\mathcal{C}_f$ s'obtient par une infinité de translation de son graphe réduit à un ensemble de longueur T.



Il suffit alors d'étudier f sur une période $[0; T[$.

Démonstration : Supposons f paire de période T. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Notons $n = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$. On a alors $n \leq \dfrac{x}{T} < n+1$.
Donc, $nT \leq x < nT + T$
Donc, $0 \leq x - nT < T$.
Or, $f(x) = f(x - nT)$ et $x - nT \in [0; T[$ donc le graphe de f est bien obtenu par translations de son graphe réduit à $[0, T[$. ■

Exemple 10. Sur quel ensemble doit-on étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 1$?
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ donc f est paire.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = \cos(2x + 2\pi) + 1 = f(x)$. La fonction f est $\pi-$périodique.

On l'étudie seulement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
En effet, par parité, on étend l'étude à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et, par périodicité, on étend l'étude à $\mathbb{R}$.

1.4 Monotonie d'une fonction

Définition 11.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans D_f.

- La fonction est <u>croissante sur I</u> lorsque
$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
- La fonction est <u>décroissante sur I</u> lorsque
$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$
- Une fonction croissante ou décroissante sur I est <u>monotone sur I</u>.

Exemple 12. Etudier, sans calcul de la dérivée, la monotonie de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ définie sur $[0, 1[$.
Soit $(x, y) \in [0, 1[^2$ avec $x \leq y$.
Alors, $x^2 \leq y^2$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; 1[$.
Donc, $1 - x^2 \geq 1 - y^2$.
Donc, $\sqrt{1 - x^2} \geq \sqrt{1 - y^2}$ par croissance de la fonction racine carrée.
Donc, $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ par décroissance de la fonction inverse.
Donc, f est croissante sur $[0, 1[$.

1.5 Fonctions minorées, majorées et bornées

Définition 13.

Soit f une fonction définie sur D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset D_f$.
On dit que f est <u>minorée sur A</u> lorsque
$$\exists\, m \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in A\ ,\ m \leq f(x).$$
m est un <u>minorant</u> de f sur A.
On dit que f est <u>majorée sur A</u> lorsque
$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in A\ ,\ f(x) \leq M.$$
m est un <u>majorant</u> de f sur A.
On dit que f est <u>bornée sur A</u> lorsque
$$\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall x \in A\ ,\ m \leq f(x) \leq M.$$

2 Limites et asymptotes

2.1 Limites aux bords de l'ensemble de définition

Théorème 14.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**
ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Démonstration : Il faut la définition d'une limite. ■

Théorème 15.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \times g(x)\big)$ selon les valeurs des limites de f et de g.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**Forme Ind.**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	**Forme Ind.**	0	0	0	**Forme Ind.**
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Démonstration : Il faut la définition d'une limite. ■

Théorème 16.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$\ell < 0$	0^+	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	**F.I.**	**F.I.**	0^-	0^-
0^+	0^+	0^-	**F.I.**	**F.I.**	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Démonstration : Il faut la définition d'une limite. ■

Théorème 17.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que , au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors g admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème 18.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On suppose que

1. Au voisinage de a, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
2. Les fonctions f et g admettent des limites **finies** en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction h admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

2.2 Asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$

Définition 19.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $a \notin D_f$.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale pour la fonction f lorsque

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \pm\infty$$

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale pour la fonction f lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Exemple 20. Etudier les différentes asymptotes de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x+4}$.
On commence par l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

- En $-\infty$ et en $+\infty$.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq -2,\ f(x) = \dfrac{x(1+\frac{3}{x})}{2x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.
  La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est une tangente horizontale.
- En -2^-.
  $\lim\limits_{x\to-2^-} (2x+4) = 0-$ et $-2+3 > 0$ donc $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$.
- En -2^+.
  $\lim\limits_{x\to-2^+} (2x+4) = 0^+$ et $-2+3 > 0$ donc $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$.
  La droite d'équation $x = -2$ est une tangente verticale.

3 Dérivée et variations d'une fonction

3.1 Justifier la dérivabilité

Théorème 21.

1. Les fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition : polynômes, fractions rationnelles, sinus, cosinus, tangente, exponentielle et logarithme.
2. Les fonctions valeur absolue, partie entière ou racine carrée ne sont pas dérivables sur tout leur ensemble de définition.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité.
On le démontrera plus tard. ■

3.2 Fonctions dérivées usuelles

Théorème 22.

Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	0
$x \mapsto \lambda x$	$\mathbb{R}$	λ
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$2x$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$

Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \mathbf{e}^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbf{e}^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité et de la dérivée.
On le démontrera plus tard. ■

3.3 Dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème 23.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $I \subset D_f$ tel que f soit dérivable sur I.

1. f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
2. f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
3. f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement et du théorème des accroissements finis.
On le démontrera plus tard. ■

__**Exemple 24.**__ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x$.

On va étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et dresser son tableau de variation pour obtenir son signe. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$$

La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leq f(0) \Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \Rightarrow \ln(1+x) \leq x$$

3.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 25.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

1. La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2. La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
4. Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité.
On le démontrera plus tard. ■

__**Exemple 26.**__ Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa dérivée.
La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

3.5 Dérivation d'une composé de fonctions

Définition 27.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f définie sur I à valeurs dans J. Soit $g : J \to \mathbb{R}$.
On appelle <u>composé de f par g</u> la fonction notée $g \circ f$ et définie par

$$g \circ f : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g\big(f(x)\big) \end{cases}$$

__**Exemple 28.**__ Soient f et g les fonctions définies par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

- Pour $f \circ g$.
  La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  La fonction f est à définie sur $\mathbb{R}$.
  Donc la fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et
  $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ (f \circ g)(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - 1 = \dfrac{x^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$.

- Pour $g \circ f$.
  La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, +\infty[$ et la fonction g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
  Pour ne pas atteindre la valeur -1 avec f, on doit retirer 0 de l'ensemble de définition.
  Donc, $g \circ f$ est défini sur $\mathbb{R}^*$ et
  $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

Théorème 29.

Soient $f : I \to J$ dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J.
La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité.
On le démontrera plus tard. ■

Exemple 30. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On reconnait une composée avec la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$ et la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \cos(x)$.
Puisque la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a aucune restriction et $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Par le théorème précédent, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (g \circ f)'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \times -\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exemple 31. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \ln(2x)$.
On reconnait une composée avec la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ et la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln(x)$.
La fonction f doit être à valeurs strictement positives donc on la restreint à $\mathbb{R}_+^*$.
Finalement, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème précédent, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (g \circ f)'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{x}$.

Théorème 32.

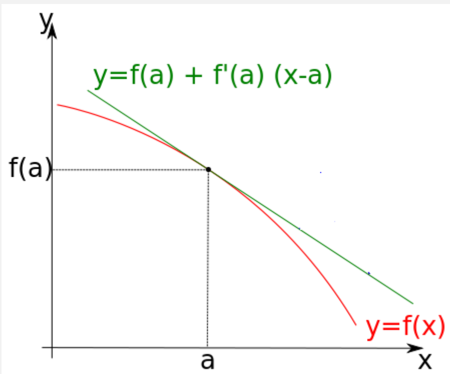
Soit u une fonction dérivable sur I.

Fonction	Fonction dérivée
$x \mapsto (u(x))^2$, $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto 2u'(x).u(x)$
$x \mapsto (u(x))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nu'(x).(u(x))^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$	$x \mapsto \dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$x \mapsto \mathbf{e}^{u(x)}$	$x \mapsto u'(x).\mathbf{e}^{u(x)}$
$x \mapsto \ln(u(x))$	$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin(u)$	$x \mapsto u'(x).\cos(u(x))$.

3.6 Equation de la tangente

Théorème 33.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $a \in D_f$.
Si f est dérivable en a alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est tangente à la courbe C_f au point $(a, f(a))$.



Remarque 34. L'étude du signe de la fonction $x \to f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$ permet ensuite de déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente.