Exercice 1. Lister les ensembles suivants :

1. $E = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 4\}$.

   | $E = \{-2, 2\}$.

2. $E = \{x^2$ avec $x \in \{-1, 5, 12\}\}$.

   | $E = \{1, 25, 144\}$.

3. $E = \{0, 2\}^3$

   | $E = \{(0,0,0),(0,0,2),(0,2,0),(0,2,2),(2,0,0),(2,2,0),(2,0,2),(2,2,2),\}$

4. $E = \mathcal{P}(\{0, 1\})$.

   | $E = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Exercice 2. Soient A et B deux ensembles. Comparer A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$ en terme d'inclusion.

| On a $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Exercice 3.

1. Donner un exemple de deux ensembles non vides dont l'intersection est vide.

   | On peut prendre $A = \{-1, 2, 3\}$ et $B = \{-3, -2, 1\}$.

2. Donner un exemple de deux ensembles dont l'union est vide.

   | On a $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

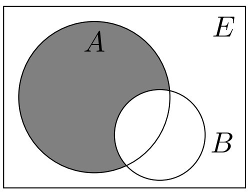
3. Est-ce le seul exemple possible ?

   | Supposons qu'il existe A et B deux ensembles non tous les deux vides tels que $A \cup B = \varnothing$.
   | Par les règles sur l'inclusion, $A \subset A \cup B$.
   | Par définition de A et B, $A \subset \varnothing$.
   | Or, $A \neq \varnothing$.
   | C'est absurde donc de tels ensembles n'existent pas.

Exercice 4. Soient A et B deux ensembles. On note $A - B = \{x \in A, x \notin B\}$.

1. Représenter $A - B$.

   | Soient A et B deux ensembles.



2. Ecrire $A - B$ à l'aide d'opérations sur les ensembles vus en cours.

   | Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

   | Donc, $A - B = A \cap \overline{B}$.

3. Prouver que $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$.

   | On peut raisonner par double implication.

$\Rightarrow$: Supposons que $A - B = A$.
Pour montrer une égalité entre les deux ensembles, on va montrer une double inclusion.
$\subset$: Par définition, on a bien $B - A \subset B$.
$\supset$: Soit $x \in B$.
Donc, $x \notin A - B$. Donc, $x \notin A$ puisque, par hypothèse,$A - B = A$.
Donc, $x \in B - A$.
D'où $B \subset A - B$.
Par double inclusion, $B - A = B$.

$\Leftarrow$: On mène le même raisonnement en inversant le rôle de A et de B.

On peut également raisonner par équivalence.

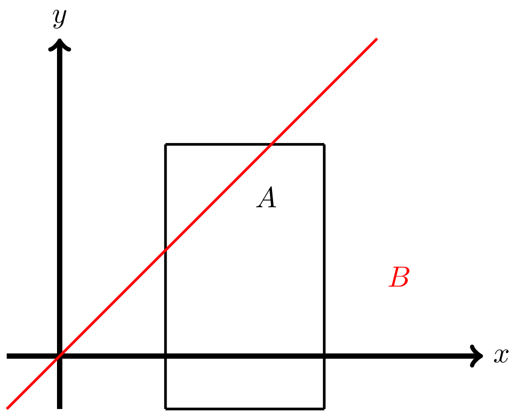
$$\begin{aligned} A - B = A \quad &\Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} = A \\ &\Leftrightarrow \quad A \subset \overline{B} \\ &\Leftrightarrow \quad B \subset \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \quad B \cap \overline{A} = B \\ &\Leftrightarrow \quad B - A = B \end{aligned}$$

Pour le passage de la première à la deuxième ligne, on peut le démontrer de la façon suivante.
Soit $x \in A$. Donc, $x \in A \cap \overline{B}$ donc $x \in \overline{B}$. D'où, $A \subset \overline{B}$.

Exercice 5. On définit les deux ensembles suivants

$$A = [2, 5] \times [-1, 4] \text{ et } B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \leq x\right\}.$$

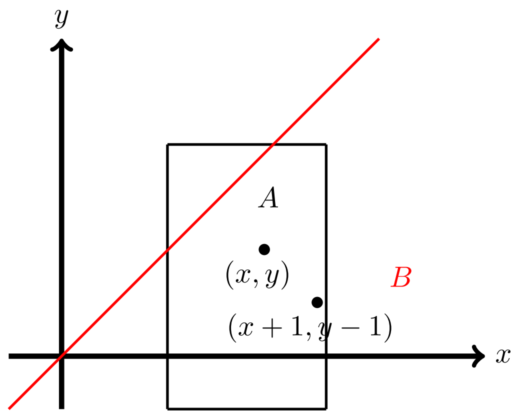
1. Représenter A et B.



2. Que pensez-vous de l'implication suivante ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ (x, y) \in A \Rightarrow (x + 1, y - 1) \in B$$

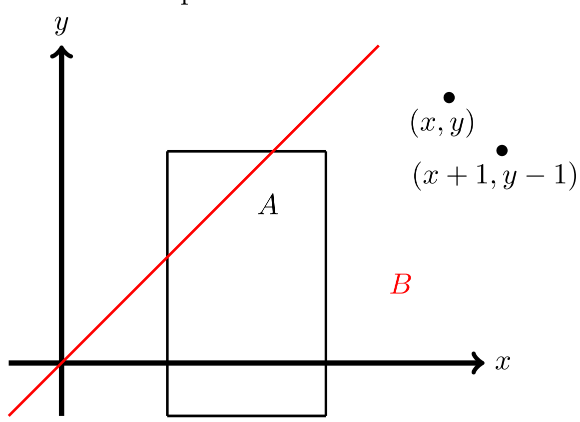
Soit $(x,y) \in A$.
On a donc $x \in [2;5]$ et $y \in [-1;4]$.
Donc, $x+1 \in [3;6]$ et $y-1 \in [-2;3]$.
Donc, $y-1 \leq x+1$. D'où $(x+1,y-1) \in B$.
Donc, l'implication est vraie.



3. Que pensez-vous de la réciproque ? On commencera par l'énoncer.

Voici la réciproque : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+1,y-1) \in B \Rightarrow (x,y) \in A$.
On va montrer qu'elle est fausse en proposant un contre-exemple.

Prenons $x = 7$ et $y = 5$. On a $y-1 \leq x+1$ donc $(x+1,y-1) \in B$.
Pourtant, $x \notin [2;5]$ donc $(x,y) \notin A$.



4. Montrer que $A \cap B \neq \varnothing$.

Le dessin nous en convainc mais ça ne constitue pas une preuve.
Prenons $x = 4$ et $y = -1$. On a $(x,y) \in A \cap B$ donc $A \cap B \neq \varnothing$.

Exercice 6. Que pensez-vous de l'ensemble $E = \{1 + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$?

1. L'ensemble E est non vide car 2 appartient à E.
2. $E = \{0, 2\}$ donc c'est un ensemble fini.
3. Il a un plus grand élément 2 qui est donc sa borne supérieure.
4. Il a un plus petit élément 0 qui est donc sa borne inférieure.

Exercice 7. Soit $A = \left\{\dfrac{2^n}{2^n - 1},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < \dfrac{2^n}{2^n-1} \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 < \frac{2^n}{2^n-1} \leq 2 \Leftrightarrow 2^n - 1 < 2^n < 2(2^n-1) \Leftrightarrow -1 < 0 < 2^n - 2$$

La dernière double inéquation est vrais dès que $n \geq 1$. Donc la première est vraie aussi.

2. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A si elles existent.

   De la question précédente, on déduit que l'ensemble A est minoré par 1 et majoré par 2.
   De plus, $2 \in A$ donc A est non vide.
   On en déduit que A admet une borne inférieure et une borne supérieure, inf(A) et sup(A), et que

   $$\sup(A) \leq 2 \text{ et } \inf(A) \geq 1.$$

   2 est un majorant atteint (pour $n = 1$) donc 2=max(A). Ainsi, $\sup(A) = 2$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{2^n-1} = 1$ donc il y a des éléments de A aussi proche qu'on le souhaite de 1 sans jamais l'atteindre.
   A n'admet donc pas de plus petit élément et inf(A)=1.

Exercice 8. [*] Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.
Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Soit $a \in A$.
$\Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq \sup(B)$. Donc, sup($B$) est un majorant de A.
Or, sup(A) est le plus petit majorant de A donc $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 9. [**] Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $A + B$ est majoré.

   Pour $a \in A$, on a $a \leq \sup(A)$ et pour $b \in B$, $b \leq \sup(B)$.
   Soit $x \in A + B$. $\exists(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. Donc, $x \leq \sup(A)+\sup(B)$.
   L'ensemble $A + B$ est donc majoré par sup(A)+sup(B).

2. En déduire qu'il admet une borne supérieure.

   Il est non vide et il admet ainsi une borne supérieure $\sup(A + B)$.

3. Montrer que $\sup(A + B)=\sup(A)+\sup(B)$

   Par définition de la borne supérieure comme plus petit des majorants, on a par la question précédente, $\sup(A + B) \leq \sup(A)+\sup(B)$.
   On va montrer l'inégalité dans l'autre sens. Soit $b \in B$.

   $$\begin{array}{rcl}
   \forall a \in A,\ a + b & \leq & \sup(A + B) \\
   a & \leq & \sup(A + B) - b \\
   \text{donc, } \forall b \in B,\ \sup(A) & \leq & \sup(A + B) - b \\
   \forall b \in B,\ b & \leq & \sup(A + B) - \sup(A) \\
   \text{donc, } \sup(B) & \leq & \sup(A + B) - \sup(A) \\
   \text{d'où, } \sup(B) + \sup(A) & \leq & \sup(A + B)
   \end{array}$$

   Par double inégalité, on obtient $\sup(A + B)=\sup(A)+\sup(B)$.