BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°1

Samedi 14 septrembre 2024

– Calculs sur les nombres réels, récurrences et raisonnements. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.
N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 – Calculs.

1. Simplifier chacune des expressions.
   - $A = \dfrac{(27)^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$.
   - $B = \dfrac{3^{21} - 3^{22}}{3^{33} + 3^{30}}$.
   - $C = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$.
   - $D = \left(\dfrac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$.
2. (a) Montrer que $5 - 2\sqrt{6} > 0$.
   (b) Montrer que $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\cos(x) < -\dfrac{1}{2}$.
4. Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à $34cm$ et l'aire à $60cm^2$?

Exercice 2 – Raisonnements.

1. Pour un entier n donné, écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes.
   (a) L'entier n est pair.
   (b) L'entier n n'est pas divisible par 8.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, par contraposée, l'implication suivante.
$$n^2 - 1 \text{ n'est pas un multiple de } 8 \Rightarrow n \text{ est pair.}$$
3. (a) Enoncer la réciproque.
   (b) Démontrer que la réciproque est vraie.
   On pourra remarquer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ 4k^2 - 1 = 4k^2 - 2 + 1$.

Exercice 3 – Une suite récurrente d'ordre 2.

On considère la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = (2n+1)3^n$.

Tournez s'il vous plait.

Exercice 4 – Une suite récurrente d'ordre 1.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n^2} \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 5 – Racine cubique.

On rappelle que pour tout réel a, il existe un unique réel appelé "racine cubique de a", et noté $\sqrt[3]{a}$ solution de l'équation $x^3 = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Dans cet exercice, on note $\mathrm{A} = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, $\mathrm{B} = \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ et $y = \mathrm{A}+\mathrm{B}$.

1. Calculer A^3 et B^3.
2. En déduire que $y^3 = 20-6y$.
3. Proposer une racine évidente de l'équation $x^3+6x-20=0$.
4. Montrer qu'il existe deux réels b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3+6x-20 = (x-2)(x^2+bx+c)$.
   On donnera leur valeur.
5. Résoudre l'équation $x^3+6x-20=0$.
6. En déduire une expression simplifiée de y.