BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 1

— 14 septembre 2024—

Exercice 1.

1. • $A = \dfrac{(27)^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{3^{-3} \times 2^4}{3^{-4} \times 2^4} = \boxed{3}$.

   • $B = \dfrac{3^{21} - 3^{22}}{3^{33} + 3^{30}} = \dfrac{3^{21}(1-3)}{3^{30}(3^3+1)} = \dfrac{-2}{3^9.28} = \boxed{\dfrac{-1}{3^9 \times 14}}$.

   • $C = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1|$.
   Or, $\sqrt{3} - 1 > 0$ donc $\boxed{C = \sqrt{3} - 1}$.

   • $D = \left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{(5-\sqrt{2})^2}{3} = \dfrac{25 - 10\sqrt{2} + 2}{3} = \boxed{\dfrac{27 - 10\sqrt{2}}{3}}$.

2. (a) $0 < 24 < 25$ donc $0 < \sqrt{24} < \sqrt{25}$ donc $0 < 2\sqrt{6} < 5$ donc $\boxed{5 - 2\sqrt{6} > 0}$.

   (b) Ce sont deux réels positifs. On va comparer leurs carrés.
   Puisque $5 - 2\sqrt{6} > 0$ alors $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.
   De plus, par identité remarquable, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.
   Par passage à la racine carré, $\boxed{\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

3. $$\cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[}$.

4. On note x la largeur et y la longueur du rectangle (donc $0 \leqslant x \leqslant y$).
   Les contraintes donnent le système :

   $$(S) : \begin{cases} 2(x+y) = 34 \\ xy = 60 \end{cases}$$

   Ainsi :

   $$(S) \iff \begin{cases} y = 17 - x \\ x(17-x) = 60 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 17 - x \\ -x^2 + 17x - 60 = 0 \end{cases}$$

   La deuxième équation est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 17^2 - 4 \times 60 = 49 > 0$.
   Donc cette équation a deux solutions réelles distinctes : $\dfrac{-17-7}{-2} = 12$ et $\dfrac{-17+7}{-2} = 5$. Ainsi,

   $$(S) \iff \begin{cases} y = 17 - x \\ x = 12 \text{ ou } x = 5 \end{cases} \iff (x,y) = (5,12) \text{ ou } (x,y) = (12,5)$$

   Or $x < y$. On en déduit que $\boxed{\text{le rectangle a pour largeur 5 cm et pour longueur 12 cm}}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

   (a) $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ n = 2k$

(b) $\forall k \in \mathbb{Z},\ n \neq 8k$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose n impair.
donc $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.
donc $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1)$.
Or, $k(k+1)$ est le produit de 2 entiers successifs donc il est pair.
donc $\exists\ \tilde{k} \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 - 1 = 4.2\tilde{k} = 8\tilde{k}$.
Donc, 8 divise $n^2 - 1$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La réciproque de l'implication est : n est pair $\Rightarrow n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8.
(b) Soit n un entier pair. $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k$.
donc $n^2 - 1 = 4k^2 - 1 = 4k^2 - 2 + 1 = 2(2k^2 - 1) + 1$.
donc $\exists\ K \in \mathbb{Z},\ n^2 - 1 = 2K + 1$.
Donc, $n^2 - 1$ est impair. En particulier, il n'est pas divisible par 8.
Donc, la réciproque est vraie.

Exercice 3.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n = (2n+1)3^n\text{"}$$

- **Initialisation :**
$u_0 = 1 = (0+1)3^0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
$u_1 = 9 = (2+1)3^1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6u_{n+1} - 9u_n && \text{par définition de la suite} \\ &= 6(2n+3)3^{n+1} - 9(2n+1)3^n && \text{d'après } \mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1} \\ &= 2(2n+3)3^{n+2} - (2n+1)3^{n+2} && \\ &= (4n+6-2n-1)3^{n+2} && \text{(on a factorisé par } 2^{n+2}\text{)} \\ &= (2n+5)3^{n+2} && \text{donc } \mathcal{P}_{n+2} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** Ainsi, d'après le principe de récurrence (à deux pas), $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (2n+1)3^n}$.

Exercice 4.

1. $\boxed{u_0 = \sqrt{1},\ u_1 = \sqrt{3},\ u_2 = \sqrt{5},\ u_3 = \sqrt{7}}$.

2. On conjecture que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2n+1}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n$: "$u_n = \sqrt{2n+1}$".
   - (Initialisation) On a déjà montré que $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies.
   - (Hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
   Alors $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$. Or $u_n = \sqrt{2n+1}$ d'après $\mathcal{P}_n$.
   Donc $u_{n+1} = \sqrt{2 + (2n+1)} = \sqrt{2n+3} = \sqrt{2(n+1)+1}$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2n+1}}$.

Exercice 5.

1. Par définition de la racine cubique, $\boxed{A^3 = 10 + 6\sqrt{3}}$ et $\boxed{B^3 = 10 - 6\sqrt{3}}$.
$AB = \sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{100 - 36.3} = \sqrt[3]{-8}$ donc $\boxed{AB = -2}$.
2. $y^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3AB^2 + 3A^2B + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = A^3 + B^3 + 3ABy$.
Or, $A^3 + B^3 = 20$ et $AB = -2$ d'où $\boxed{y^3 = 20 - 6y}$.

3. On remarque que $2^3 - 20 + 6.2 = 8 - 20 + 12 = 0$ donc $\boxed{\text{2 est une racine évidente.}}$

4. On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse Supposons qu'il existe deux réels b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + bx + c)$.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 6x - 20 = x^3 + bx^2 + cx - 2x^2 - 2bx - 2c = x^3 + (b-2)x^2 + (c-2b)x - 2c$.

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 2 = 0 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 10 - 2.2 = 6 \\ c = 10 \end{cases}$$

Synthèse : Posons $b = 2$ et $c = 10$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(x-2)(x^2 + 2x + 10) = x^3 + 2x^2 + 10x - 2x^2 - 4x - 20 = x^3 + 6x - 20$.

Donc, $\boxed{\text{il existe deux réels } b \text{ et } c \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 20 + 6x = (x-2)(x^2 + bx + c).}$

5. Résolvons l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^3 - 20 + 6x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)(x^2 + 2x + 10) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } \underbrace{x^2 + 2x + 10}_{(*)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \end{aligned}$$

Car le discriminant du trinôme (*) vaut $\Delta = 4 - 40 < 0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \{2\}}$.

6. Nous avons établi que $y^3 = 20 - 6y$, donc y est solution de l'équation précédente. Puisque y est réel et que cette équation a une unique solution réelle, on en déduit $\boxed{y = 2}$.