Chapitre 5 : Fonctions usuelles (prof)

Table des matières

1 Fonctions trigonométriques

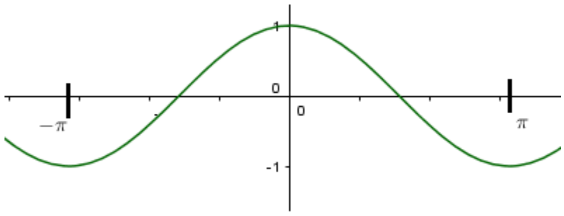
1.1 Fonction cosinus

Théorème 1.

La fonction cos est paire, $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement. On le démontrera plus tard. ■

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1



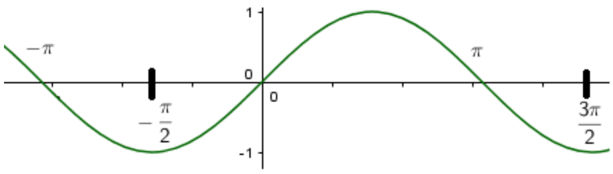
1.2 Fonction sinus

Théorème 2.

La fonction sin est impaire, $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement. On le démontrera plus tard. ■

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1



1.3 Fonction tangente

Théorème 3.

La fonction $\tan := \dfrac{\sin}{\cos}$ est impaire, $\pi-$périodique et définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Elle est continue et dérivable sur et $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration : La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

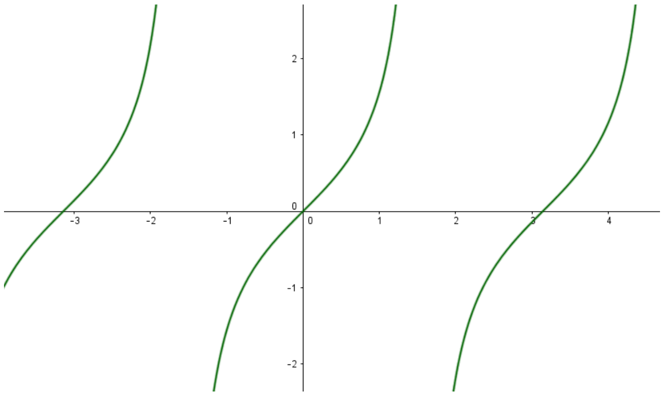
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On peut simplifier différemment.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin 2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

■

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		$+$	
$\tan(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert$



2 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

2.1 Fonction exponentielle

Théorème 4.

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On la note $x \mapsto \exp(x)$ ou encore $x \mapsto \mathbf{e}^x$.

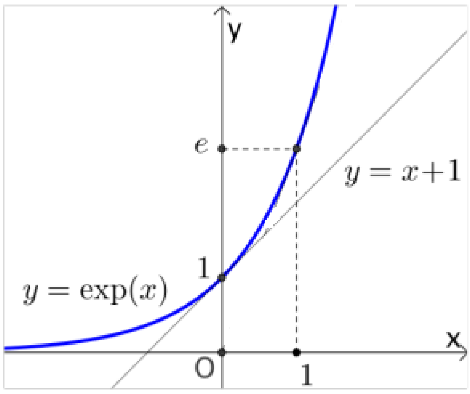
Théorème 5.

1. La fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \mapsto +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Théorème 7.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^x \geq x+1$$

Démonstration : On étudie la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathbf{e}^x - (x+1)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathbf{e}^x - 1$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
Donc, la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(0)$.
Or, $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^x - (x+1) \geq 0$. ■

Théorème 8 (Propriétés fonctionnelles)**.**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x.\mathbf{e}^y \qquad \mathbf{e}^{-x} = \frac{1}{\mathbf{e}^x} \qquad \mathbf{e}^{x-y} = \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathbf{e}^{nx} = (\mathbf{e}^x)^n$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{e}^{xy} = (\mathbf{e}^x)^y.$$

Démonstration : On démontre le deuxième point par récurrence pour $\mathbb{N}$. ■

Théorème 9 (Croissances comparées)**.**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \mapsto -\infty} x\mathbf{e}^x = 0 \qquad \lim_{x \mapsto 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = 1$$

On peut généraliser ces limites :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \mapsto -\infty} x^n \mathbf{e}^x = 0.$$

Exemple 10. Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^2 \mathbf{e}^{-2x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 \mathbf{e}^{-2x} = (-x\mathbf{e}^{-x})^2$.
Or, $\lim_{X \to -\infty} X\mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} -x\mathbf{e}^{-x} = 0$. Par produit, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} x^2 \mathbf{e}^{-2x} = 0$.

2.2 Fonction logarithme népérien

Définition 11.

On appelle <u>logarithme népérien</u> et on note ln l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

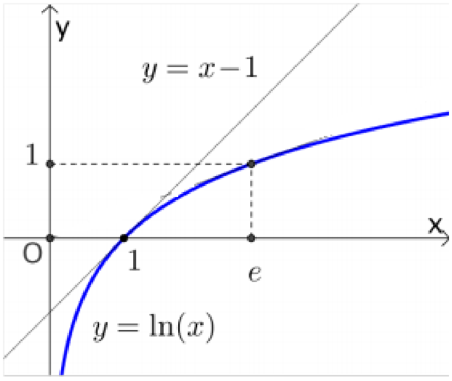
Théorème 12.

1. La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 13.

$$\lim_{x \mapsto 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \mapsto +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	1	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Théorème 14.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$$

Théorème 15 (Propriétés fonctionnelles)**.**

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Théorème 16.

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$$

Théorème 17 (Croissances comparées).

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \qquad \lim_{x\mapsto 0^+} x\ln(x)=0 \qquad \lim_{x\mapsto 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\mapsto 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$$

On peut généraliser ces limites :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0 \qquad \lim_{x\mapsto 0^+} x^n\ln(x)=0.$$

3 Fonctions exponentielle et logarithme en base quelconque

3.1 Fonctions logarithme décimal

Définition 18.

On appelle logarithme décimal et on note $x\mapsto\log(x)$ la fonction définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Théorème 19.

1. La fonction log est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ \log'(x)=\dfrac{1}{x\ln(10)}$.
2. La fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 20.

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\log(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\mapsto+\infty}\log(x)=+\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$\log'(x)$	$\Vert$		$+$		
$\log(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3.2 Fonction exponentielle en base quelconque

Définition 21.

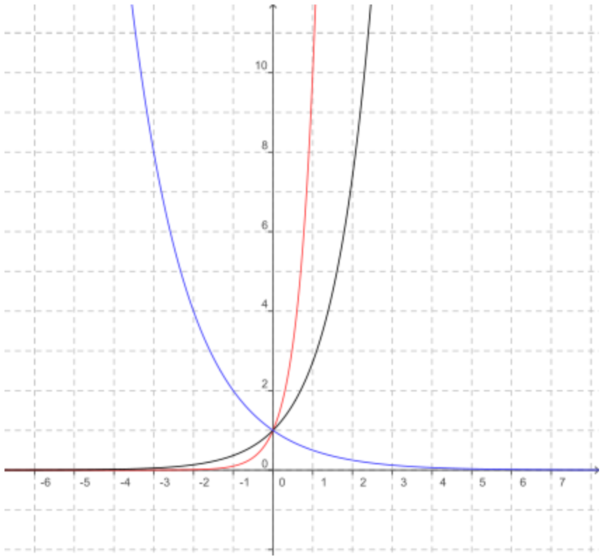
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto\exp(x\ln(a))$. Par convention, on note $a^x=\exp(x\ln(a))$.

Pour $0 < a < 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	1	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Pour $a > 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	1	$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Théorème 22.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. La fonction $x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = \ln(a)a^x$.
3. La fonction $x \mapsto a^x$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{strictement décroissante sur } \mathbb{R} \text{ si } 0 < a < 1. \\ \text{constante sur } \mathbb{R} \text{ si } a = 1. \\ \text{strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ si } a > 1. \end{array} \right.$

Théorème 23.

$$\lim_{x \mapsto -\infty} a^x = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ pour } 0 < a < 1 \\ 0 \text{ pour } a > 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} a^x = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ pour } 0 < a < 1 \\ +\infty \text{ pour } a > 1 \end{array} \right.$$

Théorème 24.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*. \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^{x+y} = a^x.a^y \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad a^{xy} = (a^x)^y$$

3.3 Fonctions puissances

Définition 25.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \exp(\alpha \ln(x))$

Par convention, on note $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Théorème 26.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^\alpha)' = \begin{cases} 0 \text{ pour } \alpha = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} \text{ pour } \alpha \neq 0 \end{cases}$
3. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } \alpha < 0. \\ \text{constante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } \alpha = 0. \\ \text{strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour } \alpha > 0. \end{cases}$

Théorème 27.

$$\lim_{x \mapsto 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ pour } \alpha < 0 \\ 0 \text{ pour } \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ pour } \alpha < 0 \\ +\infty \text{ pour } \alpha > 0 \end{cases}$$

Pour $\alpha < 0$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	1	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Pour $a > 0$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	1	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$