

Chapitre 06 : Trigonométrie (prof)

Table des matières

1	Le cercle trigonométrique	2
2	Fonctions cosinus et sinus	2
3	Fonction tangente	4
4	Formules trigonométriques d'addition	5
5	Formules de linéarisation	6
6	Angles remarquables	6
7	Équations trigonométriques	7
7.1	Équations de degré 2.	7
7.2	Égalité de cosinus ou de sinus	7
7.3	Arccos, arcsin et arctan	8
7.4	Recherche de la phase	9

1 Le cercle trigonométrique

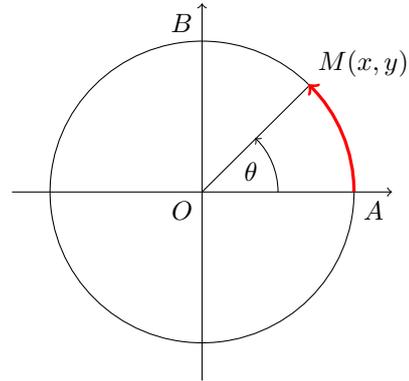
Définition 1.

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\mathcal{C}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$$

On considère un repère orthonormé (O, A, B) .
Soit $(x, y) \in \mathcal{C}(0,1)$. Pour le point M de coordonnées (x, y) , on définit l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ comme la longueur *algébrique* de l'arc de cercle entre A et M .

Les angles sont exprimés en radians.



Remarque 2. Pour mesurer un angle, on enroule sur le cercle une corde et on mesure la longueur nécessaire pour parcourir l'angle.

2 Fonctions cosinus et sinus

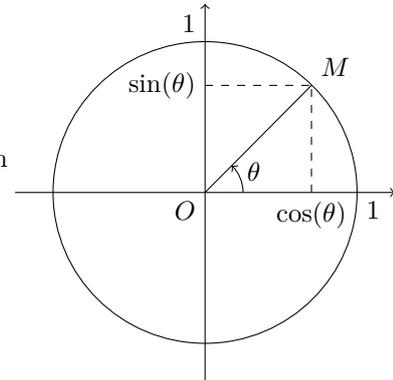
Définition 3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure θ .

On appelle cosinus de θ , noté $\cos(\theta)$, l'abscisse du point M .

On appelle sinus de θ , noté $\sin(\theta)$, l'ordonnée du point M .



Théorème 4 (Théorème de Pythagore).

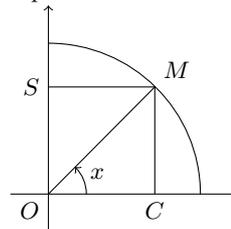
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. On va appliquer le théorème de Pythagore à partir du cercle trigonométrique.

La triangle OMC est rectangle en O .

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} OC^2 + CM^2 &= OM^2 \\ \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \end{aligned}$$



Théorème 5.

1. La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[-1, 1]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

2. La fonction cosinus est 2π -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

3. La fonction cosinus est paire :

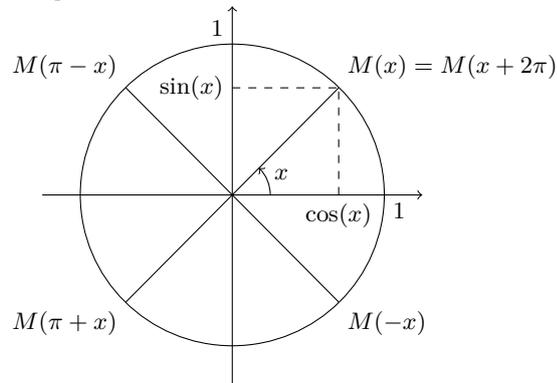
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

Démonstration : On va raisonner géométriquement. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(x)$ et $M(x + 2\pi)$ sont situés au même endroit sur le cercle.
- Les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Les points $M(x)$ et $M(\pi - x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- Les points $M(x)$ et $M(\pi + x)$ sont symétriques par rapport à l'origine.

**Théorème 6.**

1. La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[-1, 1]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

2. La fonction sinus est 2π -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

3. La fonction sinus est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Démonstration : C'est le même raisonnement que le théorème précédent. ■

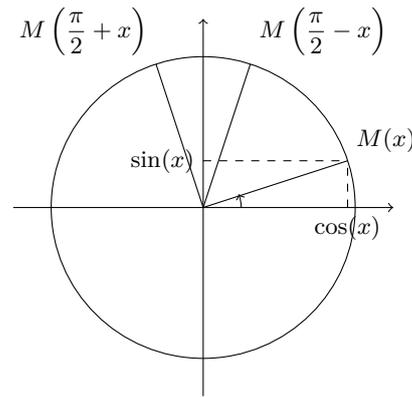
Théorème 7.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Démonstration : On va raisonner géométriquement. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(x)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Les points $M\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



3 Fonction tangente

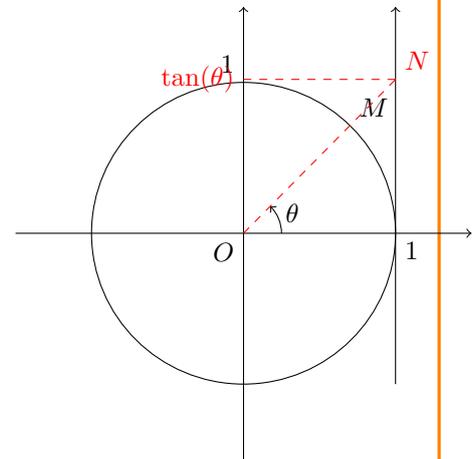
Définition 8.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure θ .

On note N le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.

On appelle tangente de θ , noté $\tan(\theta)$, l'ordonnée du point N .



Théorème 9.

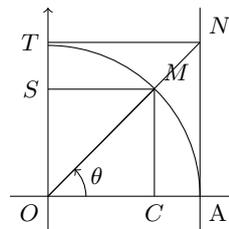
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Démonstration : On va appliquer le théorème de Thalès à partir du cercle trigonométrique.

- Les points O, C et A et O, M et N sont alignés dans le même sens.
- Les droites (MC) et (AN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès,

$$\begin{aligned} \frac{OC}{OA} &= \frac{OM}{ON} = \frac{CM}{AN} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos(\theta)}{1} &= \frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta)} \\ \Leftrightarrow \tan(\theta) &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{aligned}$$



Théorème 10.

1. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ à valeurs dans \mathbb{R} .
2. La fonction tangente est π -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

3. La fonction tangente est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(-x) = -\tan(x)$$

4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x + \pi) = \tan(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(\pi - x) = -\tan(x)$.
6. $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[, \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Démonstration : On utilise les propriétés similaires pour cosinus et sinus. ■

4 Formules trigonométriques d'addition

Théorème 11.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
2. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
3. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.
4. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration : On démontre la première égalité en utilisant le produit scalaire. ■

Théorème 12 (Formule de l'angle double).

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
On utilise ensuite $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
Finalement, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)$. ■

5 Formules de linéarisation

Théorème 13.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.
2. $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Démonstration : On repart du théorème précédent.

1. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.
2. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. ■

Théorème 14.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

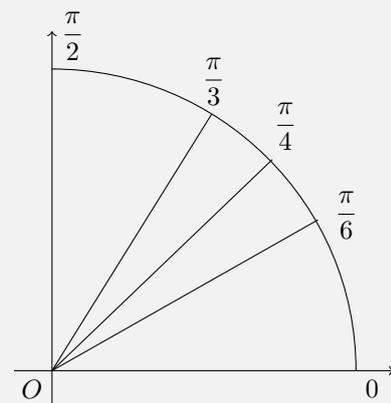
1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$.
2. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.
3. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$.

Démonstration : On utilise les formules du théorème 11. ■

6 Angles remarquables

Théorème 15.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Démonstration : On va faire la démonstration pour $\frac{\pi}{4}$.

- Montrons d'abord que le cos et le sin ont la même valeur.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

- Déterminons ensuite sa valeur.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Finalement, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Exemple 16. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12}$. Donc, on utilise ensuite la formule de trigonométrie qui relie $\sin(\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

De plus, on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}}$.

7 Équations trigonométriques

7.1 Équations de degré 2.

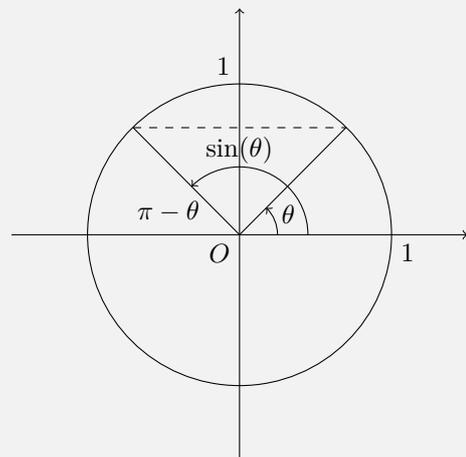
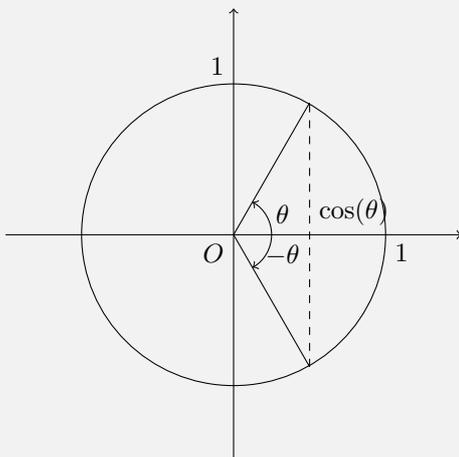
Exemple 17. Résoudre sur $[0, 2\pi]$ l'équation $2(\sin(x))^2 - 3\sqrt{3}\sin(x) + 3 = 0$.

7.2 Égalité de cosinus ou de sinus

Théorème 18.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi$$



7.3 Arccos, arcsin et arctan

Théorème 19 (arccos).

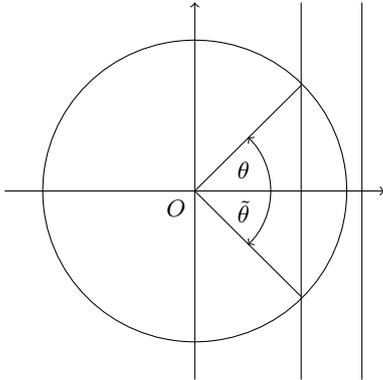
Soit $c \in \mathbb{R}$.

1. Si $c \notin [-1, 1]$, l'équation $\cos(\theta) = c$ n'admet pas de solution.
2. Si $c \in [-1, 1]$,

- (a) l'équation $\cos(\theta) = c$ admet une unique solution dans $[0, \pi]$.
On la note $\theta = \arccos(c)$.
- (b) L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(\theta) = c$ est

$$S = \{\arccos(c) + 2k\pi, -\arccos(c) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration : On regarde l'intersection entre la droite d'équation $x = c$ et le cercle trigonométrique. Selon la valeur de c , il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection.



1. Si $c \notin [-1, 1]$, il n'y a pas d'intersection.
2. Si $c \in [-1, 1]$, il y a deux points d'intersection. Un seul correspond à un angle dans le segment $[0, \pi]$. C'est lui qu'on appelle $\arccos(c)$.

Théorème 20 (arcsin).

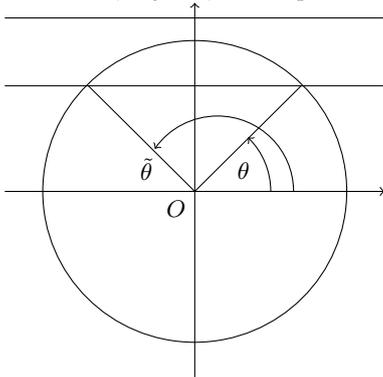
Soit $s \in \mathbb{R}$.

1. Si $s \notin [-1, 1]$, l'équation $\sin(\theta) = s$ n'admet pas de solution.
2. Si $s \in [-1, 1]$,

- (a) l'équation $\sin(\theta) = s$ admet une unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
On la note $\theta = \arcsin(s)$.
- (b) L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(\theta) = s$ est

$$S = \{\arcsin(s) + 2k\pi, \pi - \arcsin(s) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration : On regarde l'intersection entre la droite d'équation $y = s$ et le cercle trigonométrique. Selon la valeur de s , il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection.



1. Si $s \notin [-1, 1]$, il n'y a pas d'intersection.
2. Si $s \in [-1, 1]$, il y a deux points d'intersection. Un seul correspond à un angle dans le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. C'est lui qu'on appelle $\arcsin(s)$.

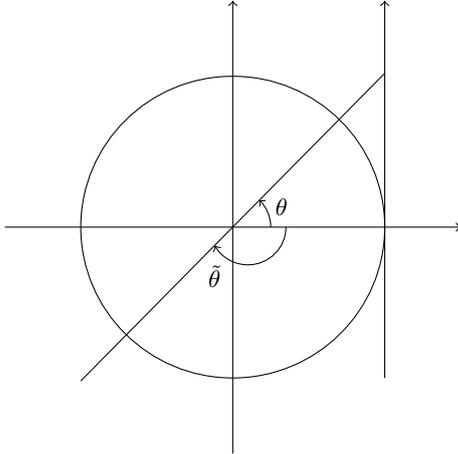
Théorème 21 (arctan).

Soit $t \in \mathbb{R}$.

L'équation $\tan(\theta) = t$ admet une unique solution dans $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On la note $\theta = \arctan(t)$.

Démonstration : On regarde l'intersection entre la droite d'équation $y = tx$ et le cercle trigonométrique.



Il y a deux points d'intersection.

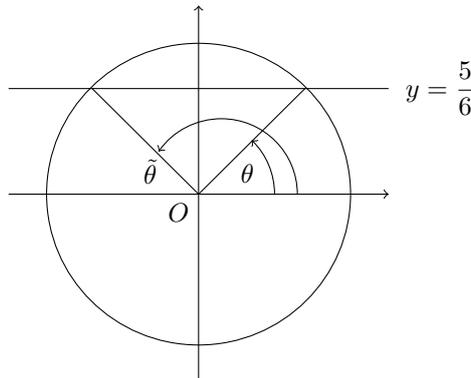
Un seul correspond à un angle dans le segment

$$\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

C'est lui qu'on appelle $\arctan(t)$.

Exemple 22. Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{5}{6}$.

$\frac{5}{6} < 1$ donc l'équation admet une infinité de solutions.



Les deux solutions évidentes sont $\arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$ et $\pi - \arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$. Donc,

$$S = \left\{ \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + 2k\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

7.4 Recherche de la phase

Exemple 23. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une autre expression de $G = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)$.

On va utiliser la formule $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

$$\begin{aligned} G &= \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta) \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(\theta) \right) \\ &= 2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Methode 1.

Soit $(A, B, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Notons $G = A \cos(\theta) + B \sin(\theta)$. On va exprimer G sous la forme d'un cosinus.

- On calcule l'amplitude $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.
- On factorise par r : $G = r \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\theta) \right)$.
- On détermine un angle ϕ tel que $\cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- On utilise une formule de factorisation

$$G = r(\cos(\phi) \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta)) = r \cos(\theta - \phi)$$

Exemple 24. Résoudre l'équation $\sin(x) + \sqrt{3} \cos(x) = \frac{1}{2}$.

On commence par modifier l'expression de gauche.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sqrt{3} \cos(x) &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) \right) \\ &= 2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \right) \\ &= 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{6} = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \end{aligned}$$