BCPST 1.1 & 1.2

Devoir maison n°2 — Ensembles, Etude de fonctions et trigonométrie. —

Exercice 1 - Calculs.

1. Déterminer les limites suivantes.
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\mathbf{e}^x - x^2 + 3\right)$.
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(e^{-3x})$.

   Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, la dérivée et dresser le tableau de variation de : $f : x \mapsto \ln(2-x^2)$.

Exercice 2 - Ensembles.

Soit E un ensemble. Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer que $A\cup B = A\cap B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 3 - Fonction tangente hyperbolique.

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de th. On le notera I.
2. Étudier la parité de la fonction th. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de th ?
3. Justifier que th est dérivable sur I et montrer que
$$\forall x \in I,\ \mathrm{th}'(x) = \frac{4}{(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x})^2}$$
4. Déterminer les limites de th aux bornes de I. Précisez les asymptotes éventuelles.
5. Dresser le tableau de variations de th sur I.
   La fonction est-elle bornée sur I ?
6. Déterminer l'ensemble $\mathrm{th}(I)$.
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de th au point d'abscisse $x = 0$.
8. Tracer l'allure de la courbe représentative de th.

Exercice 4 - Trigonométrie

On considère le réel $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1. (a) Justifier que l'assertion suivante est vraie :
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2 \Longleftrightarrow \sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$$

(b) En utilisant la question précédente, montrer que $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$.

(c) En déduire que le réel α est bien défini.

2. Calculer $\cos(2\alpha)$. En déduire α.
3. Montrer que $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
4. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.

Exercice 5 - Trigonométrie bis

1. Rappeler l'ensemble de définition de tangente. On le notera $D_{\tan}$.
2. Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right[$, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
3. Déterminer une équation dont $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ est solution.
4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.