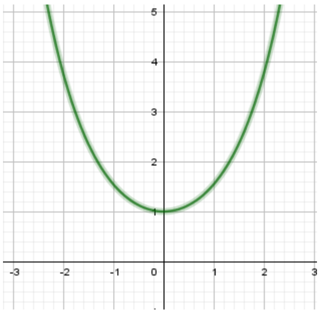
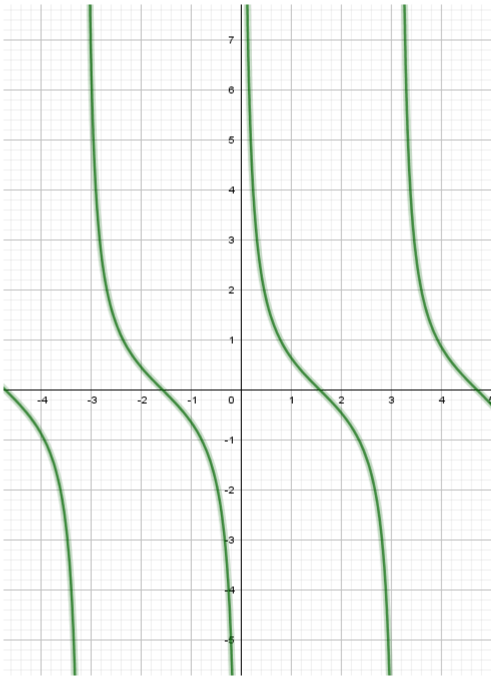
Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
   Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ?
   Correction La fonctions f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Elle est paire donc on peut les étudier sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer les variations de la fonction f.
   Correction La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}$$
   On étudie ensuite le signe de la dérivée. Sot $x \in \mathbb{R}$.
   $$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x \geq \mathbf{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$
   Finalement, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
3. Calculer les limites de f aux bords de son ensemble de définition et tracer son graphe.
   Correction Par samme de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



Exercice 2 Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de g.
   Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? On notera cet ensemble $\mathcal{D}$.
   Correction $D_g = \{x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   La fonction g est impaire et $\pi-$périodique. On peut réduire l'ensemble d'étude à $\mathcal{D} = \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathcal{D}$.
   Correction La fonction g est dérivable sur D_g comme quotient de deux fonctions dérivables sur D_g avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
   $$\forall x \in D_g,\ g'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$
   La fonction g est décroissante sur $\mathcal{D}$.
3. Calculer les limites de g aux bords de $\mathcal{D}$ et tracer son graphe.
   Correction Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$.



Exercice 3 Résoudre les équations suivantes.

1. $2\mathbf{e}^{4x} - 5\mathbf{e}^{2x} + 2 = 0$.
   Correction $2\mathbf{e}^{4x} - 5\mathbf{e}^{2x} + 2 = 0$ est équivalente à $2\mathbf{X}^2 - 5\mathbf{X} + 2 = 0$ avec $\mathbf{X} = \mathbf{e}^{2x}$. Résolvons cette équation.
   $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$. Il y a donc 2 racines réelles : $X_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ ou $X_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.
   Cela donne deux valeurs possibles pour x : $x_1 = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ ou $x_2 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{\ln(2)}{2}$.
2. $\dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2} = 2$.
   Correction Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x} = 4 \Leftrightarrow \mathbf{e}^{2x} + 1 = 4\mathbf{e}^x \Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0$ où $X = \mathbf{e}^x$.
   $\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$. Il y a donc deux racines réelles : $X_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ ou $X_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$.
   Finalement, il y a deux solutions pour x : $x_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x_2 = \ln(2 - \sqrt{3})$.
3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
   Correction Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} = \mathbf{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x})$ car $x \mapsto \mathbf{e}^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   $\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \dfrac{x}{2}\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)\sqrt{x}(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 4$.
   Donc, 1 et 4 sont les solutions.
4. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
   Correction On va modifier l'écriture de cette équation :
   $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow 2^{2x} \times \frac{3}{2} = 3^x \times \frac{4}{\sqrt{3}}$
   $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$. Or, la fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3$ donc $x = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 4 Etudier en détail les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

   Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = \mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.

   (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

   (b) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

   Cette dérivée s'annule en $x = \mathbf{e}$. Elle est positive sur $]0;\mathbf{e}]$ et négative sur $]\mathbf{e};+\infty[$. D'où le tableau de variation

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

   (c) Calculons les limites. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\mathbf{e}^0 = 1$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^{\frac{\ln(\mathbf{e})}{e}} = \mathbf{e}^{\frac{1}{e}}$.
   $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x}\left(= \frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} = \mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	$\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{e}}}$	$\searrow$	1

2. $x \mapsto (x+1)^x$.

   Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto (x+1)^x = \mathbf{e}^{x\ln(x+1)}$.

   (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x+1 > 0\} =]-1,+\infty[$.

   (b) La fonction $x \mapsto x\ln(x+1)$ est définie sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

   $$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right]\mathbf{e}^{x\ln(x+1)}$$

   On veut étudier de la signe de g : $x \mapsto \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$.
   Cette fonction est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ et

   $$\forall x \in]-1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$$

   La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Elle ne s'annule donc qu'une seule fois. Or, $g(0) = 0$ donc f' ne s'annule qu'en 0.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

(c) Calculons les limites. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$.
Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$f(0) = \mathbf{e}^0 = 1$.
$\lim\limits_{x\to-1^+} x\ln(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathbf{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$