BCPST

1.1 & 1.2

BCPST 1.12

Corrigé du devoir maison n° 2

— Ensembles, Étude de fonctions et trigonométrie. —

Exercice 1 - Calculs.

1. Cette inéquation est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. On la résout sur D :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-3} \geqslant 1 &\iff \frac{x+1}{2x-3} - 1 \geqslant 0 \\ &\iff \frac{x+1-(2x-3)}{2x-3} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{-x+4}{2x-3} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x+4}{2x-3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est }]\frac{3}{2}, 4]}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc, $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x\mathbf{e}^x - x^2 + 3 = x\mathbf{e}^x \left(1 - \dfrac{x}{\mathbf{e}^x} + \dfrac{3}{x\mathbf{e}^x}\right)$.

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathbf{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathbf{e}^x = +\infty$.

Donc, par quotient, somme puis produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\mathbf{e}^x - x^2 + 3\right) = +\infty}$.

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) - \sqrt{x}$.

Au voisinage de $+\infty$, $\ln(1+x) - \sqrt{x} = \ln(x(1+1/x)) - \sqrt{x} = -\sqrt{x}(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(1+1/x)}{\sqrt{x}})$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ par croissance comparée, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{\sqrt{x}} = 0$ par quotient des limites.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(1+1/x)}{\sqrt{x}} = 1$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$, on en déduit par produit des limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) - \sqrt{x} = -\infty}$.

(d) Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{x+1}{\mathbf{e}^x + 1} = \dfrac{x(1+1/x)}{e^x(1+e^{-x})}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 1/x = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées. Donc par produit et quotient des limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\mathbf{e}^x + 1} = 0}$.

3. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - (1+x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
Et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$.
Avec de plus, $f(0) = e^0 - 1 = 0$. On peut donc dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On déduit de ce tableau de variations que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \leqslant e^x}$.

4. **Ensemble de définition**
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff 2 - x^2 > 0 \\ &\iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{D} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
   Dérivabilité :
   f est la composée de $x \mapsto 2 - x^2$, dérivable sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par ln, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
   $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \dfrac{-2x}{2-x^2}$.
   Signe de f' :
   Puisque $2 - x^2 > 0$ sur $\mathcal{D}$, $2 - x^2$ est du signe de $-2x$. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
f	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty \|\|$

   (On calcule les limites en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$ par composition des limites).

Exercice 2. Ensembles

On raisonne par double implication.

$\Leftarrow$ On suppose que $A = B$.
Donc, $A \cup B = A$ et $A \cap B = A$. D'où $A \cup B = A \cap B$.

$\Rightarrow$ On suppose que $A \cup B = A \cap B$.
On raisonne par double inclusion pour montrer que $A = B$.

$\subset$ Soit $x \in A$.
$\Rightarrow x \in A \cup B$ car $A \subset A \cup B$.
$\Rightarrow x \in A \cap B$ car $A \cap B = A \cup B$.
$\Rightarrow x \in B$.
Donc, $\underline{A \subset B}$.

$\supset$ Par symétrie de l'hypothèse, on obtient la symétrie du résultat, $\underline{B \subset A}$.

Finalement, $A = B$

Donc, on a bien montré que $\boxed{A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B}$.

Exercice 3 - Fonction tangente hyperbolique.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$. $\boxed{\text{Donc th est définie sur } \mathbb{R}}$.
2. th est définie sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ (-x) = \dfrac{\mathbf{e}^{-x} - \mathbf{e}^{-(-x)}}{\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{-(-x)}} = \dfrac{\mathbf{e}^{-x} - \mathbf{e}^{x}}{\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{x}} = \dfrac{-(\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x})}{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}} = -(x)$.
   $\boxed{\text{Donc est impaire}}$. On en déduit que sa courbe représentative admet le point O (origine du repère) pour centre de symétrie.
3. est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad '(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \dfrac{4}{(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x})^2}}$.

4. Limite en $+\infty$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ (x) = \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc par somme et quotient des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = 1}$.
$\boxed{\text{On en déduit que la droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe en } +\infty}$.
Limite en $-\infty$:
Puisque la fonction est impaire, on déduit de la limite précédente que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -1}$
et que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe en } -\infty}$.

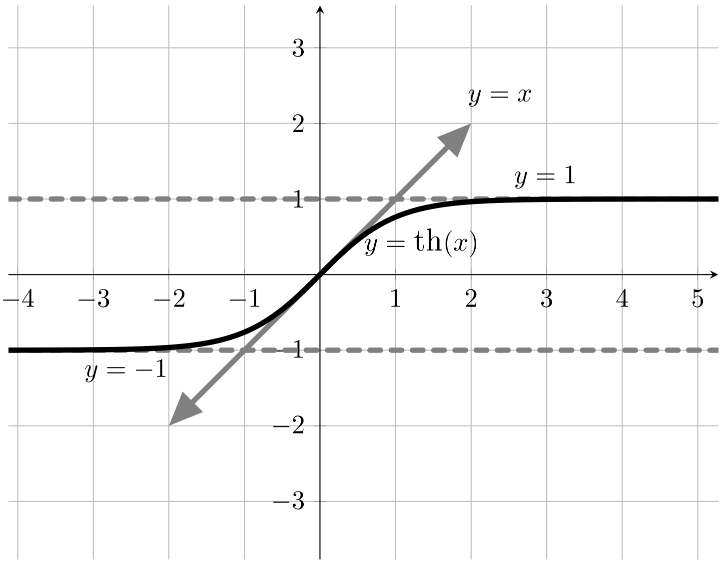
5. Nous avons calculé la dérivée de th à la question 3. D'après l'expression obtenue, $\forall x \in \mathbb{R},\ '(x) > 0$ donc la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On résume les résultats obtenus dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$'(x)$		$+$	
			1
		$\nearrow$	
	-1		

On constate d'après ce tableau de variations que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < (x) < 1$, donc $\boxed{\text{ est bornée}}$.

6. Puisque est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative admet une tangente en tout point. En particulier, la tangente au point d'abscisse $x = 0$ a pour équation $y = (0) + th'(0)x$. Puisque $(0) = 0$ et $'(0) = \dfrac{4}{(e^0+e^0)^2} = 1$, on en déduit l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$: $\boxed{y = x}$.

7. On déduit de notre étude l'allure de la courbe représentative de th :



Exercice 4 - Trigonométrie.

1. (a) On suppose que $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$. On applique la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où : $\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} \leqslant \sqrt{4^2}$.
Or les nombres $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ et 4 sont positifs, donc $\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{4^2} = 4$. Donc $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$.
Réciproquement, on suppose que $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$. Ces nombres étant positifs, on peut appliquer la fonction carré, croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$.
Ainsi, on a prouvé que :
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2 \iff \sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$$
(b) D'après la question précédente, il suffit de montrer que $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$.
Or $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 6+2+2\sqrt{6}\sqrt{2} = 8+2\sqrt{12} = 8+4\sqrt{3}$.

Puisque $3 \leqslant 4$, en appliquant la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\sqrt{3} \leqslant 2$. Donc $8 + 4\sqrt{3} \leqslant 8 + 4 \times 2$.
Ainsi, $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leqslant 16$.
Puisque $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leqslant 4^2$, on en déduit, d'après la question précédente, que $\boxed{\sqrt{6} + \sqrt{2} \leqslant 4}$.

(c) Nous avons montré que $\sqrt{6} + \sqrt{2} \leqslant 4$. De plus ces nombres sont positifs. Donc, en divisant par $4 > 0$ on obtient : $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \leqslant 1$.
Puisque $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \in [-1, 1]$, on en déduit qu'il existe un réel α tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
De plus, puisque ce nombre est positif, on peut choisir α dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Plus précisément, $\alpha = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$.

2. Nous savons que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
Donc, d'après la question précédente, $\cos(2\alpha) = 2\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 = 2.\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi, $\boxed{\cos(2\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$.
On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2\alpha = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$. Donc $\alpha = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $\alpha = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$.
Puisque $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la seule valeur possible de α est $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{12}}$.

3. Nous savons que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
Donc $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.
Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin\alpha = -\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}}$.
Or $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(\alpha) \geqslant 0$. Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}}$.
Or $\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.
Puisque $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} > 0$, on en déduit que $\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Donc $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$.

4. On reconnaît dans cette équation une expression du type $a\cos(x) + b\sin(x)$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On va factoriser par $\sqrt{a^2 + b^2}$, ici $\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2 &\iff \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}\cos x + \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}\sin x = \frac{2}{4} \\
&\iff \cos(\alpha)\cos(x) + \sin(\alpha)\sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \cos(x - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{K} : x - \frac{\pi}{12} = \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{K} : x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{K} : x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{12} + 2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Exercice 5 - Trigonométrie bis

1. $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

   $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \dfrac{2\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 - \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}$. (on a factorisé par $\cos^2(x)$.

   Donc, $\boxed{\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}}$.

3. On pose $x = \dfrac{\pi}{8}$ dans l'équation précédente.

   $\tan\left(2\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \Rightarrow 1 - \tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

   On en déduit que $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ est solution de l'équation $\boxed{X^2 + 2X - 1 = 0}$.

4. Les solutions de cette équation sont $X_1 = -1 + \sqrt{2}$ et $X_2 = -1 - \sqrt{2}$.

   Or, $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ est positif donc $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}$.