

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes.

1. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = e^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3xe^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)e^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{5x}$ en 0.
10. $f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
11. $f(x) = e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x+5}{x^2+1} = \frac{x(1+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x^5-x}{x^2-1} = x^3 \cdot \frac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $e^x - 2x + 1 = e^x \left(1 - 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$.
Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $3xe^{-x^2} = 3 \cdot \frac{-x^2 e^{-x^2}}{-x}$.
Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 e^{-x^2} = 0$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$.
6. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} = +\infty$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}) = 0}$.
7. On applique la même méthode.
$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 1}$.
8. On utilise un encadrement de la fonction cosinus.
 $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\cos(5x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos(5x)e^{-3x}| \leq e^{-3x}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(5x)e^{-3x} = 0}$.
9. $\frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5} \times \frac{\sin(2x)}{2x}$. Or, $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$. Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$.
Par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5}}$.
10. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{x \sin(x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} = 0}$.
11. $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 \leq x - \sin(x) \Rightarrow e^{x-1} \leq e^{x-\sin(x)}$ par croissante sur \mathbb{R} de la fonction exponentielle.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$. Par minoration, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty}$.

Exercice 2 Après avoir donné leur ensemble de définition et justifié leur dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = xe^{-x^2}$.
2. $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x)$.
3. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3}$.
4. $f(x) = \frac{1 + \sin(2x)}{\cos(x) - 3}$.
5. $f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$.
6. $f(x) = \ln(2 + \cos(x))$.
7. $g(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.
8. $h(x) = \sqrt{1 + \ln(1 - x)}$.
9. $l(x) = \ln(\ln(x))$.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} par composée puis produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} par composée puis somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(2x) - \cos(x) = \cos(2x) - \cos(x)$$

3. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 3)e^x}{(x^2 + 3)^2}$$

4. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{2 \cos(2x)(\cos(x) - 3) - (1 + \sin(2x)) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x) - 3)^2} \\ &= \frac{2 \cos(2x) \cos(x) - 6 \cos(2x) + \sin(x) - \sin(2x) \sin(x)}{(\cos(x) - 3)^2} \end{aligned}$$

5. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[1, +\infty[$ et la fonction \ln est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Par composée, la fonction $u : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\frac{2x}{1 + x^2} \cdot x - \ln(1 + x^2)}{x^2} = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$$

6. $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 2 + \cos(x) > 0\}$. Or,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ , 1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3 \end{aligned}$$

donc $D_f = \mathbb{R}$. f est dérivable sur \mathbb{R} comme composée d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $[1, 3]$ et d'une fonction dérivable sur $[1, 3]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x) \times \frac{1}{2 + \cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

7. $D_g = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* comme composée de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R} et de la fonction $x \mapsto e^x$ dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

8.

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R}, 1 - x > 0 \text{ et } 1 + \ln(1 - x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } \ln(1 - x) \geq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } 1 - x \geq e^{-1}\} = \{x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ et } x \leq 1 - e^{-1}\} \\ D_h &=]-\infty, 1 - e^{-1}] \end{aligned}$$

La fonction h est dérivable sur $] - \infty, 1 - e^{-1}[$ comme composée de la fonction $x \mapsto 1 + \ln(1 - x)$ dérivable sur $] - \infty, 1 - e^{-1}[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in] - \infty, 1 - e^{-1}[, h'(x) = \frac{-1}{1 - x} \times \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln(1 - x)}} = \frac{1}{2(x - 1)\sqrt{1 + \ln(1 - x)}}$$

9. $D_l = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } x > 1\} =]1, +\infty[$.

La fonction l est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, l'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

Remarque : Ceci nous dit aussi que la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $g : x \mapsto \frac{2x^3 - 2x - 1}{x^3 - 1}$

1. Etudier la branche infinie de la fonction g .

Correction On est face à une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. On va modifier l'écriture de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x > 1, g(x) = \frac{x^3(2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 - \frac{1}{x^3})} = \frac{2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ donc par somme et quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

On a également $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$.

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de g .

2. Déterminer la position de la courbe représentative de g par rapport à la branche infinie.

Correction Pour avoir la position de la courbe par rapport à son asymptote, on doit étudier le signe de la quantité $g(x) - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x > 1, g(x) - 2 = \frac{-2x + 1}{x^3 - 1}$$

On construit alors le tableau de signe du quotient.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-2x + 1$	$+$	0	$-$	$-$
$x^3 - 1$	$-$	$-$	0	$-$
$g(x) - 2$	$-$	$+$	\parallel	$-$

Donc, la courbe représentative de g est au-dessus de la tangente sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et en-dessous sur $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 4 Pour chacune des fonctions, étudier la parité et donner son intervalle d'étude.

1. $x \mapsto \ln(|x|)$.

Correction La fonction est définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(|-x|) = \ln(|x|)$.

Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur \mathbb{R}_+ .

2. $x \mapsto \sin(x^2)$.

Correction La fonction est définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin((-x^2)) = \sin(x^2)$.

Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur \mathbb{R}_+ .

3. $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$.

Correction La fonction est définie sur \mathbb{R}^* et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3 - x} = \frac{x^2 - 1}{-(x^3 + x)} = -\frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$.

Donc la fonction est impaire et on peut l'étudier sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} croissantes sur \mathbb{R} .

1. Etudier la monotonie de $f + g$.

Correction Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.

$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.

$\Rightarrow f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$ par addition d'inégalités.

Donc $f + g$ est croissante sur \mathbb{R} .

2. Si f et g sont à valeurs positives, étudier la monotonie de $f \times g$.

Correction On suppose maintenant que f et g sont à valeurs positives.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.

$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.

$\Rightarrow f(x).g(x) \leq f(y).g(y)$ par produit d'inégalités.

Donc fg est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 6 Pour chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la fonction $g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \ln(x)$

Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 2 > 0\}$.

Or, $x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$ donc $D_{g \circ f} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[, g \circ f(x) = \ln(x^2 - 2).$$

2. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 2x + 3 > 0\}$.

Or, $\Delta > 0$ et $f(0) = 3$ donc f est toujours strictement positive.

Donc, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

Exercice 7 On définit deux fonctions f et g sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $a = 0$ des fonctions f et g sont parallèles.

Correction Les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x+2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 4x + 1}{(x^2+1)^2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

Donc, $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$.

Les tangentes en 0 ont donc le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.

2. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $a = 1$ sont sécantes.

Correction $f'(1) = 1$ donc l'équation de la tangente en $a = 1$ à la courbe de f est $y = (x-1) + \frac{3}{2}$.

$g'(1) = \frac{-1}{2}$ donc l'équation de la tangente en $a = 1$ à la courbe de g est $y = \frac{-1}{2}(x-1) + 1$.

On cherche un point d'intersection entre les deux droites.

$$(x-1) + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}(x-1) + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Donc les deux tangentes sont sécantes en $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$.