Exercice 1. Calculer les expressions suivantes.

1. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.
3. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expression suivantes.

1. $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
2. $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.
3. $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 3. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
2. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$.
3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$.
4. $|\sin(x)| > \frac{1}{2}$.
5. $|\tan(x)| < \sqrt{3}$.
6. $\sin(2x) = \sin(x)$.

7* $\cos(x) + \sin(x) = 0$.

Exercice 4. Déterminer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule reliant $\cos(2\theta)$ et $\sin^2(\theta)$.
2. En déduire une expression de $\sin^2(\theta)$.
3. Déterminer $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.
4. En déduire $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.

Exercice 6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$.
2. Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2$.

1. Déterminer une équation du second degré (E) dont $\cos(x)$ est solution.
2. Résoudre l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 8. [**]

1. Soit $s \in [-1, 1]$. Simplifier $\sin(\arcsin(s))$.
2. Soit $s \in [-1, 1]$. Simplifier $\cos^2(\arcsin(s))$.
3. Résoudre l'équation $\arcsin(s) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.

Exercice 9.

1. Questions préliminaires :
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer, par un raisonnement par contraposition, la proposition P suivante :

   $$P : \text{"}\sin(a) \neq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(\frac{a}{2^n}) \neq 0\text{"}$$

   On commencera par exprimer clairement la contraposée de P.

   (b) Rappeler la formule de trigonométrie donnant $\sin(2x)$ pour tout réel x et l'appliquer pour $x = \dfrac{a}{2^{n+1}}$. On simplifiera les fractions au maximum.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\sin(a) \neq 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$