Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimez à l'aide des symboles Σ et $\prod$ les quantités suivantes.
   (a) $3+4+5+6+7+8+9+10$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. $1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}$.
   (c) $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-2) \times 2n$
   (d) $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)$
2. Ecrire les sommes suivantes en extension.
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 2k$.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2^k$.
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.
   (d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1$.

Correction

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} k = \sum_{k=0}^{10} k - \sum_{k=0}^{2} k = \frac{10 \times 11}{2} - 3 = 52.$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (a^2)^k = \begin{cases} \dfrac{1-(a^2)^{n+1}}{1-a^2} \text{ si } a^2 \neq 1 \\ n+1 \text{ si } a^2 = 1 \end{cases}$

   (c) C'est le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$ donc
   $\displaystyle 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!.$

   (d) C'est le produit de tous les nombres impairs plus petits que $(2n+1)$ donc
   $\displaystyle 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) = \prod_{k=0}^{n} (2k+1).$
   C'est aussi le produit de tous les nombres plus petits que $(2n+1)$ divisé par le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$
   $$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

2. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 2k = 2+4+6+\cdots+22+24.$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2^k = 2+4+8+\cdots+2^{2n-1}+2^{2n}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + (n-1)(n-2) + n(n-1).$

   (d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1 = 1 \times \times \cdots \times 1 \times 1.$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} (3k+7)$
3. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

Correction

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = 3\sum_{k=4}^{n+1} k + 7\sum_{k=4}^{n+1} 1 = 3\frac{(n+1-4+1)(n+1+4)}{2} + 7(n+1-4+1)$
$\displaystyle= \tfrac{3(n-2)(n+5)}{2} + 7(n-2) = \frac{(n-2)(3n+29)}{2}.$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{2(1-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2^n}$ donc $\displaystyle\lim_{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \lim_{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1.$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\mathbf{e}^k = \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n}\mathbf{e}^k = n!.\mathbf{e}^{\sum_{k=1}^{n} k} = n!\mathbf{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+3n\right)$
$\displaystyle= \frac{n+1}{6}.(2n^2+4n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire l'expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Correction

1. On raisonne par analyse-synthèse.
   - **A** Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
     Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$.
     Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 = a(k+1)+bk = (a+b)k + a$.
     Par identification, $a = 1$ et $a + b = 0$.
     Donc, $a = 1$ et $b =_1=$.
   - **S** Posons $a = 1$ et $b = -1$.
     $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.
     Donc, il existe deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$
On reconnait une somme télescopique.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$

Exercice 4. Soit $(q, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes et les produits suivants.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k(1-q)$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k(1-q) = \sum_{k=1}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right) = q - q^{n+1}$.
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$.
4. Soit $k\in[\![2,n]\!]$. $\displaystyle 1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}$.
   $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Exprimez de deux façons la somme suivante. $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right]$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Correction Notons $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} k^3$. S est aussi égal à $\displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{n} k^3$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4$ par la formule des sommes télescopiques.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = \sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) = 4\sum_{k=0}^{n}k^3 + 6\sum_{k=0}^{n}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1$.
   Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S + 6\sum_{k=0}^{n}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n}k + n + 1$.
   Ainsi, $\displaystyle 4S = (n+1)^4 - 6\sum_{k=0}^{n}k^2 - 4\sum_{k=0}^{n}k - (n+1) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$
   $= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = n^2(n+1)^2$
   Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 6. Soit $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$.

1. A l'aide de formule de trigonométrie, exprimer $\cos(x)$ comme un quotient de sinus.
   Correction $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donc $\displaystyle\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$.
2. Calculez $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.
   Correction $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{x}{2^k})}$.
   On reconnait un produit télescopqiue. Donc,
   $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2^n})}$.

Exercice 7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Ecrire les sommes doubles suivantes sous forme de deux sommes puis les calculer.

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} 1$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} j$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 1$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} ij$
5. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} (i+j)^2$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$

2. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$

3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(n-i+1)}_{\text{nombre d'entiers entre } i \text{ et } n} = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i) = \sum_{i=1}^{n}(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i$
$\displaystyle= (n+1)n - \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(n-\frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)n}{2}.$

4. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

5. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{formule sur les carrés}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = n\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   Finalement,
   $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}^{n} (i+j)^2 = 2.\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{2n^2(n+1)(2n+1)+3n^2(n+1)^2}{6}$
   $\displaystyle= \frac{n^2(n+1)[2(2n+1)+3(n+1)]}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$

Exercice 8. Résoudre l'équation suivante.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} = 5n.$$

Correction
$\displaystyle\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = \frac{6n+3n(n-1)+(n-2)(n^2-n)}{6} = \frac{n^3+5n}{6}.$
Donc l'équation à résoudre est $n^3+5n = 20n$ c'est à dire $n(n^2-25)=0$.
On cherche une solution strictement positive donc $n=5$ est la seule solution au problème posé.

Exercice 9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{i}}{2^i}$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i1^{n-i}=(1+1)^n=2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i1^{n-i}=(1+(-1))^n=\begin{cases}0 \text{ si } n\neq 0\\ 1 \text{ si } n=0.\end{cases}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1}\times 1=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^i1^{n-i}=\frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i1^{n-i}-\underbrace{1}_{i=0}\right]$
$\displaystyle=\frac{(3+1)^n-1}{3}=\frac{4^n-1}{3}$.
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{i}}{2^i}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{1}{2^i}\times 1^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\times 1^{n-i}-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{i=n}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2^n}$
$\displaystyle=\frac{3^n-1}{2^n}$.

Exercice 10. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $1\leq k\leq n$. Démontrez que $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

   Correction $\displaystyle k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k\mathbf{-1+1})!}$
   $\displaystyle=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!}=n\binom{n-1}{k-1}$.
2. Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$.

   Correction $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}=2^{n-1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$.

   Correction $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{l=0}^{n-1}n\binom{n-1}{l}=n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}=n2^{n-1}$.
4. [$*$] Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

   Correction Soit $k\in[\![0,n]\!]$.
   $\displaystyle\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l}=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}-\binom{n+1}{0}\right]$
   $\displaystyle=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

Exercice 11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On définit $\displaystyle P=\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle I=\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}$.

1. Calculer $P+I$ et $P-I$.
   Correction On remarque d'abord que P correspond en fait à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair inférieur à n et I correspond à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k impair inférieur à n. Ainsi, $I+P=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}=2^n$.
   De plus, $P-I$ correspond donc à la somme des $\binom{n}{k}$ avec un signe positif lorsque k est pair et négatif sinon.
   Donc, $P-I=\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}-\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}=0.$
2. En déduire I et P.
   Correction On a donc le système suivant :
$$\begin{cases} P+I=2^n \\ P-I=0 \end{cases} \Rightarrow P=I=2^{n-1}$$

Exercice 12.

1. Quel est le coefficient devant a^4b^2 dans le développement de $(a-b)^6$?
   Correction Par le binôme de Newton, $(a-b)^6=\sum_{l=0}^{6}\binom{6}{l}a^l(-b)^{6-l}$. Le coefficient en a^4b^2 correspond à $l=2$,
   c'est-à-dire $(-1)^2\binom{6}{2}=15$.
2. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?
   Correction Toujours par le binôme de Newton, $(a-b+2c)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^{9-k}(2c)^k$.
   On cherche le terme en c^3 donc on s'intéresse à $k=3$ c'est à dire $\binom{9}{3}2^3(a-b)^6$.
   Le terme en $a^4b^2c^3$ est donné par celui devant a^4b^2 dans $(a-b)^6$.
   Ce coefficient est donc $\binom{9}{3}2^3\binom{6}{2}=10080$.

Exercice 13. [*] Soit $(a,b,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}$.
On pose $A_n=(a-b)^{2n}+(a+b)^{2n}$.

1. Calculez A_n.
   Correction On applique le binôme de Newton aux 2 termes de la somme :
$$\begin{cases} (a-b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^k(-b)^{2n-k} \\ (a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^kb^{2n-k} \end{cases} \Rightarrow (a-b)^{2n}+(a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^kb^{2n-k}[(-1)^{2n-k}+1]$$
   Or, $(-1)^{2n-k}+1=\begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}$
   Finalement, il ne reste que les indices k pairs dans la somme c'est à dire quand $k=2p$ avec $0\leq p\leq n$.
   Donc, $(a-b)^{2n}+(a+b)^{2n}=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}a^{2p}b^{2n-2p}\times 2=2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}(a^2)^p(b^2)^{n-p}$.

2. En déduire que le réel $s_n = (1-\sqrt{2})^{2n} + (1+\sqrt{2})^{2n}$ est un entier naturel pair.
   Correction Pour calculer s_n , on applique la formule avec $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.
$$s_n = 2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}(1^2)^p(\sqrt{2}^2)^{n-p} = 2\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}2^{n-p}$$
   . C'est bien un entier naturel pair.

Exercice 14. Pour tout entier naturel non nul p et pour tout entier naturel n, on pose : $S_p(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^p$.
L'objectif de ce problème est de calculer la somme $S_3(n)$ de trois manières différentes. Chacune des parties propose une méthode de calcul. Les parties sont indépendantes.

1. Rappeler sans démonstration, les expressions en fonction de l'entier naturel n, de $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
2. **Démonstration par récurrence.**
   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $S_3(n) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. **En exprimant $S_3(n)$ en fonction de $S_2(n)$ et $S_1(n)$.**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant un changement d'indice, exprimer, $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4$ en fonction de $S_4(n)$ et de n.
   (b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4$ en fonction de $S_4(n)$, $S_3(n)$, $S_2(n)$ et $S_1(n)$ (on pourra développer $(k+1)^4$).
   (c) En déduire une expression de $S_3(n)$ en fonction de n.
4. **À l'aide d'une somme double**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour toute famille $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de réels : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}\right]$
   (*indication : on pourra commencer par une relation de Chasles*).
   (b) Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} ij$ de deux manières.
   En déduire $S_3(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ et } S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.
2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :
$$P_n : \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
   • **initialisation** $\sum\limits_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = \dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   • **hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que P_n soit vraie. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ d'après } \mathcal{P}_n\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1))\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)) \text{ on reconnaît une identité remarquable :}\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}\end{aligned}$$

- **Conclusion** Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_4(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. **En exprimant $S_3(n)$ en fonction de $S_2(n)$ et $S_1(n)$.**

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.Posons $j = k+1$ dans la somme à calculer. On obtient : $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 = \sum_{j=1}^{n+1} j^4 = \sum_{j=1}^{n} j^4 + (n+1)^4 = \sum_{j=0}^{n} j^4 + (n+1)^4$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 = S_4(n) + (n+1)^4.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(k+1)^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ (d'après la formule du binôme). Donc $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4+4k^3+6k^2+4k+1 = \sum_{k=0}^{n} k^4 + 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 = S_4(n) + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + (n+1).}$$

   (c) D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_4(n) + (n+1)^4 = S_4(n) + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + (n+1).$$

   Les $S_4(n)$ se simplifient, et on peut exprimer $S_3(n)$ en fonction des autres termes de la somme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - (n+1)\right).$$

   D'où, en utilisant les expressions de $S_2(n)$ et $S_1(n)$, une expression de $S_3(n)$ en fonction de n :

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right).$$

   Après simplification, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$.

4. **À l'aide d'une somme double**

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ des réels.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}\right]
\end{aligned}$$

(b) Dans un premier temps, on remarque que les indices i et j sont indépendants et que l'expression sous la somme est un produit entre une quantité qui dépend de i et une qui dépend de j donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On applique maintenant la formule démontrée à la question précédente.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij &= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k-1} kj + \sum_{i=1}^{k} ik\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[k\sum_{j=1}^{k-1} j + k\sum_{i=1}^{k} i\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k.\frac{k(k-1)}{2} + k\frac{k(k+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$.